MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE
Max Planck Institute for the History of Science

PREPRINT 163 (2001)

Peter Damerow und Siegbert Schmidt

Arithmetik im historischen Prozeß: Wie „natürlich“ sind die „natürlichen Zahlen“?

Erscheint in:
Müller, G.N., Steinbring, H. und Wittmann, E.Ch. (Hrsg.),
Arithmetik als Prozeß. Stuttgart, Klett, in Vorb.

Zur Funktion des vorliegenden Textes:

Der Text bildet den historischen Teil eines Buches für die Aus- und Fortbildung von Lehrern, die keine spezialisierten Vorkenntnisse im Fach Mathematik besitzen und dennoch ihren Schülern ein Verständnis und Interesse für arithmetisches Denken vermitteln müssen. Ziel dieses Lehrmaterials ist es nicht, bestimmte mathematische Inhalte zu vermitteln, sondern Mathematik als eine grundlegende Aktivität erfahrbar zu machen. Diesem Ziel entsprechend werden hier Rechenverfahren und arithmetische Begriffsbildungen an historischen Beispielen und Aufgabenstellungen thematisiert. Zugleich soll der Text auf diese Weise dazu beitragen, eine kritische Distanz zu einem verbreiteten, durch Routinen und dogmatisch festgeschriebene Lehrinhalte verfestigten Mißverständis von arithmetischen Algorithmen zu gewinnen.

Arithmetik im historischen Prozeß: Wie „natürlich” sind die „natürlichen Zahlen”?

Peter Damerow (Berlin) und Siegbert Schmidt (Köln)

Dieses Kapitel enthält drei Teile. Der erste Teil 1. bietet Episoden aus der Geschichte des Zählens und Rechnens und eine Reihe von Aufgaben, die Neugier wecken und zur selbständigen Beschäftigung mit der Kernfrage des Kapitels ermuntern sollen: Woher zum Teufel kennen wir eigentlich die „natürliche Zahlen“? Im zweiten Teil 2. werden die Gegenstände des ersten Teils noch einmal aufgenommen, jetzt aber mit der Herausforderung, Ordnung in die historische Vielfalt der Methoden des Zählens und Rechnens zu bringen. Die ergänzenden Aufgaben des dritten Teils 3. schließlich bieten Anregungen zur selbstständigen Beschäftigung mit der Kernfrage des Kapitels. Zwei Leitfragen stehen hinter allen Aufgaben dieses Kapitels:

(1) Jede Kultur hat ein bestimmtes Arsenal von Hilfsmitteln um nummerische Probleme zu lösen; welche Aufgaben lassen sich jeweils mit diesen Hilfsmitteln leicht bewältigen, welche fordern dagegen Erfindungsgabe und Innovation heraus?

(2) Wir lassen in diesem Kapitel einmal die Allerweltsfrage beiseite, wer wann und wo schon die uns vertrauten Zahlen und Operationen gekannt hat. Wir halten uns vielmehr an den Pionier der kulturvergleichenden Erforschung des „produktiven Denkens“ Max Wertheimer:

> „Es genügt nicht zu fragen, welche Zahlen und Operationen unserer Mathematik die Völker anderer Kulturen, insbesondere die sog. Naturvölker haben. ... Die Frage muß lauten: Was für Denkgebilde haben sie in diesem Gebiet? - Welche Denkaufgaben? wie geht ihr Denken an diese heran ? (welche Leistungen, welche Fähigkeiten werden erzielt?) Es gilt die typischen Charakteristika ihres Denkens in diesem Gebiet zu finden.“ (Wertheimer 1925, S. 107) „Wie verhalten sich die Leute bei Denkaufgaben *ihres* Lebens, wo *wir* mit Zahlen operieren? “ (S. 152; Hervorhebungen verändert)

1. Alte Dokumente deuten, um dem Ursprung des Zählens und Rechnens nachzuspüren

1.1 Kann man ohne Zahlen leben? Kann man ohne Zahlen rechnen?

In vielen Sprachen der Ureinwohner Australiens - der Aborigines - gibt es keine Zahlwörter im eigentlichem Sinne, keine Zählfolge, wie wir sie zur Darstellung der unendlichen Folge der natürlichen Zahlen verwenden, keine Bezeichnungen für Zahlen jenseits von „drei“ oder „vier“. Dennoch kann man sich auch in solchen Sprachen über Mengen- und Größenbeziehungen verständigen, denn sie enthalten eine Vielfalt qualitativer Quantitätsbegriffe, mit denen man inhaltlich differenzierte Aussagen über Mengen und Größen formulieren kann. So gibt es beispielsweise im Vokabular der Guugu Yimidhirr (Nordostküste von Australien) neben Wörtern für „eins“, „zwei“ und „drei“ - letzteres kann auch „vier“ oder „wenige“ bedeuten - Bezeichnungen für „viele“, „groß“, „klein“, „lang, schmal“ „kurz“, „dick, gesund aussehend“, „dünn, ungesund aussehend“, „weit“, „eng, dicht beieinander“, „gerade, genau“, „krumm, ungenau“, „heiß“, „sehr heißes Wetter“, „kalt“ usw.

Aufgabe H 1:

(1) Versuchen Sie, Situationen oder Vorgänge aus Ihrem vertrauten Umfeld einmal dadurch zu beschreiben, daß Sie die Ihnen gewohnten sprachlichen Mittel für quantitative Angaben benutzen, und dann die gleichen Situationen oder Vorgänge ein zweites Mal mit einem Vokabular, das dem der Guugu Yimidhirr vergleichbar ist. Erfinden sie notfalls, wenn Ihnen die Worte fehlen, eigene sprachliche Wendungen.

(2) Wie unterscheiden sich solche qualitativen Quantitätsbegriffe von den Quantifizierungen, die Ihnen ansonsten in Verwendungssituationen von Zahlen geläufig sind?

(3) Kann man ohne Zahlen leben? Können nur wir nicht ohne Zahlen leben, andere Kulturen wie die Guugu Yimidhirr jedoch sehr wohl?

Die nächste Aufgabe hat ein anderes Ziel; sie bietet die Möglichkeit, sich an der Entzifferung von „Zahlen“ eines archaischen Texten zu versuchen und damit einige Schwierigkeiten kennen zu lernen, die sich einer Übersetzung in „unsere“ Zahlen entgegenstellen können. Dazu sind einige Informationen nötig.

Die bislang älteste bekannte Schrift entstand um 3200 v.Chr. im südlichen Mesopotamien im Gebiet des heutigen Irak. Aus den ersten 200 Jahren Schriftentwicklung stammen etwa 6000 Fragmente von Tontafeln mit Wirtschaftsaufzeichnungen. Die meisten von ihnen wurden im Gebiet der antiken Stadt Uruk ausgegraben. Was diese Aufzeichnungen für unsere Frage interessant macht, ist die Tatsache, daß es sich um präzise nummerische Aufzeichnungen handelt, allerdings, wie sich im Folgenden noch herausstellen wird, unter Verwendung von recht merkwürdigen Zeichen, die lange Zeit als Zeichen für die uns vertrauten „natürlichen Zahlen“ mißdeutet wurden.

Abbildung 1: Vorder- und Rückseite des archaischen Wirtschaftstexts W 9393,b (Vorderasiatisches Museum Berlin)

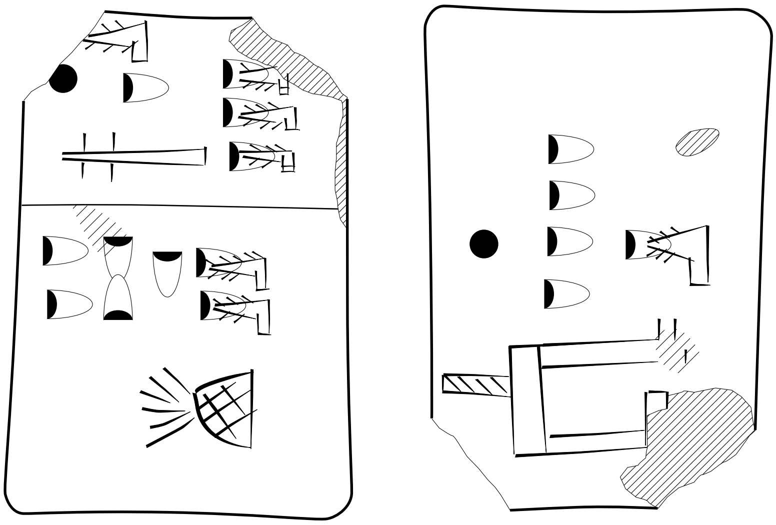


Abbildung 2: Umzeichnung des archaischen Wirtschaftstexts W 9393,b

Abbildung 1 gibt eine solche archaische Tontafel wieder, zur Verdeutlichung findet sich außerdem eine Umzeichnung des Textes in der Abbildung 2. Verwendet werden außer Schriftzeichen mit zum Teil unbekannter Bedeutung die folgenden Zahlzeichen eines proto-keilschriftlichen Ziffernsystems:

Auf der Rückseite der Tafel ist die Summe der beiden Eintragungen auf der Vorderseite notiert (Abbildung 3).

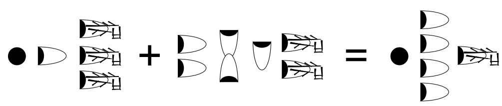
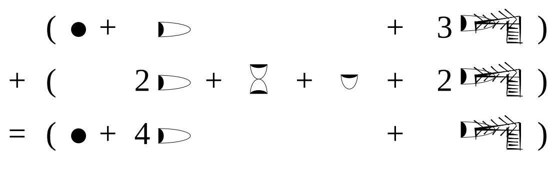


Abbildung 3: Summenbildung des archaischen Wirtschaftstexts W 9393,b

Betrachten wir die verwendeten Zahlzeichen als Unbekannte, so erhalten wir in Anlehnung an die gewohnte moderne algebraische Notationen die folgende Gleichung:



Diese Gleichung mit fünf Unbekannten wäre nicht lösbar, würden wir nicht durch das Studium der archischen Wirtschaftstexte insgesamt die Bündelungsregeln der Zahlzeichensysteme kennen, an die sich die Schreiber hielten:

- **Korrespondenzregel**: Ein Zahlzeichen wird so oft wiederholt, wie die entsprechende Zähl- oder Meßeinheit in einer Quantität (Größe) enthalten ist, und zwar bis zu einer bestimmten, vom Kontext abhängigen Grenze.
- **Ersetzungsregel**: Wird diese Grenze überschritten, so wird ein höherwertiges Zeichen eingesetzt, mit dem dann wieder gemäß der Korrespondenzregel verfahren wird.
- **Anordnungsregel**: Die Abfolge der Zeichen in der Notation entspricht ihrem Wert.

Aus der Anordnungsregel folgen die Größenrelationen zwischen den Zeichen:

Wegen der Ersetzungsregel folgen daraus vier Gleichungen, wobei die Koeffizienten, die die zu ersetzenden Wiederholungen repräsentieren, ganze Zahlen größer als Eins sein müssen.

Aus der Ersetzungsregel folgt wegen der tatsächlich auf der Tafel vorhandenen, nicht durch ein höherwertiges Zeichen ersetzten Wiederholungen ferner:

Aufgabe H 2:

(1) Übersetzen Sie die gefolgerten Beziehungen in die Sprache der Algebra, und versuchen Sie, b, c, und d durch algebraische Umformungen zu ermitteln.

(2) Warum müssen b, c und d, größer als Eins sein? Warum läßt sich a nicht ermitteln? Warum läßt sich über die Absolutwerte der Zeichen nichts aussagen?

Mit einer solchen sorgfältigen Methode wurde nach einer 50-jährigen Komödie von Irrtümern die Bedeutung der Zahlzeichen der archaischen Texte schließlich zuverlässig entschlüsselt (siehe Damerow, Englund und Nissen 1988). Dabei stellte sich etwas ganz Merkwürdiges heraus, das die widersprüchlichen Ergebnisse vorangegangener Entzifferungsversuche erklärte: Die Koeffizienten der Gleichungen änderten sich mit den Inhalten, die erfaßt wurden. Dies war insbesondere bei den beiden am häufigsten verwendeten Zeichen der Fall. Ging es um die Anzahl wohlunterscheidbarer Gegenstände, so galt die Bündelungsregel ● = 10 , offensichtlich weil man urprünglich die Finger verwendete. Ging es dagegen um das Messen von Getreide, so galt, weil das nächstgrößere Getreidemaß nicht die zehnfache, sondern nur die sechsfache Menge umfaßte, die Beziehung ● = 6 . Bei Feldflächen dagegen, bei denen die Zahlzeichen Feldmaße darstellten, die älter waren als die Erfindung der Schrift, galt ein Verhältnis von ● = 18 . Diese seltsame Variabilität der nummerischen Werte der Zeichen wirft Fragen auf:

- Repräsentieren die proto-keilschriftlichen Zahlzeichen überhaupt Zahlen?
- Könnte es sein, daß man auch ohne Zahlen rechnen kann?

Wir werden im Abschnitt 2.2 auf diese Fragen wieder zurückkommen.

1.2 Was sich Bürokraten alles haben einfallen lassen

Die frühen Hochkulturen Vorderasiens, Ägyptens, Chinas sowie Mittel- und Südamerikas waren weitgehend zentralistisch organisierte Staaten, in denen hierarchisch gegliederte Heerscharen von Staatsdienern und Aufsehern die Durchsetzung von Anordnungen der weltlichen und religiösen Machthaber zu sichern hatten. Die Verwaltung von Arbeitskräften und Gütern in Größenordnungen, zu denen es in den Dorfkulturen früherer Epochen keine Parallelen gibt, erforderte neuartige Hilfsmittel der Wirtschaftsverwaltung. So waren es die Bürokraten dieser Verwaltungshierarchien, die zwei der wichtigsten Errungenschaften der Kulturentwicklung hervorgebracht haben, die Schrift und das Rechnen. Es waren auch die Schulen, die ihrer Ausbildung dienten, in denen die ersten Schritte getan wurden, die Schrift und das Rechnen aus der engen Bindung an die Zwechsetzungen der Wirtschaftsverwaltung zu lösen und sie zu allgemeinen Mitteln der geistigen Tätigkeit zu verallgemeinern.

Für unsere Kenntnis solcher Entwicklungen kommt Mesopotamien eine besondere Bedeutung zu: In der Ebene von Euphrat und Tigris schrieb man auf Ton, einem Schreibmaterial, das auch 5000 Jahre unbeschadet überdauern kann. Hunderttausende von Originaldokumenten der Wirtschaftsverwaltung sind uns aus den 3000 Jahren überliefert, in denen die Keilschrift verwendet wurde, Texte mit Ergebnissen vom Zählen, Messen und Rechnen.

Den Anfang bildeten Tontafeln von der Art derjenigen, die Gegenstand der Aufgabe H 2 ist. Je mehr Informationen jedoch auf einer Tafel unterzubringen waren, desto mehr wurden die klobigen, mit runden Griffeln eingedrückten Zahlzeichen zu einem Problem. Von der Mitte des dritten Jahrtausends v.Chr. an begann man daher, die Formen dieser Zeichen mit dem zierlichen Schreibgriffel der Schriftzeichen nachzuahmen, bis dann im zentralistisch verwalteten Großreich der III. Dynastie von Ur (2100-2000 v.Chr.) die neuen Zeichen endgültig die archaischen Zeichen verdrängten.

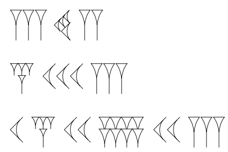
Nach dem Zusammenbruch des Großreichs (altbabylonische Periode, ca. 1900-1600 v.Chr.) werden wir Zeugen einer sensationellen Erfindung, der Erfindung des ältesten Stellenwertsystems der Welt, nämlich eines sexagesimalen Stellenwertsystems. Dieses wurde allerdings nur in speziellen Texten verwendet, in den Texten der „babylonischen Mathematik“. Man kam dabei mit zwei Grundzeichen aus: Die Eins wurde durch einen senkrechten „Keil“ (𒁹) dargestellt, die Zehn durch einen „Winkelhaken“ (𒌋). Da man das archaische Prinzip der Zeichenwiederholung zur Darstellung der Zahlen beibehielt, genügten diese beiden Zeichen, um die 59 benötigten Grundzahlen des Sexagesimalsystems darzustellen, die den 10 Individualzeichen des uns vertrauten Dezimalsystems entsprechen.

Einige Beispiele:

$222 = 3 \cdot 60 + 4 \cdot 10 + 2 = (3\ 42)_{60}$

$273 = 4 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 3 = (4\ 33)_{60}$

$52103 = 14 \cdot 60^2 + 28 \cdot 60 + 23 = (14\ 28\ 23)_{60}$



Übrigens: Man kann die letzte Notation inhaltlich auch so auffassen: 14 Stunden 28 Minuten 23 Sekunden - warum?

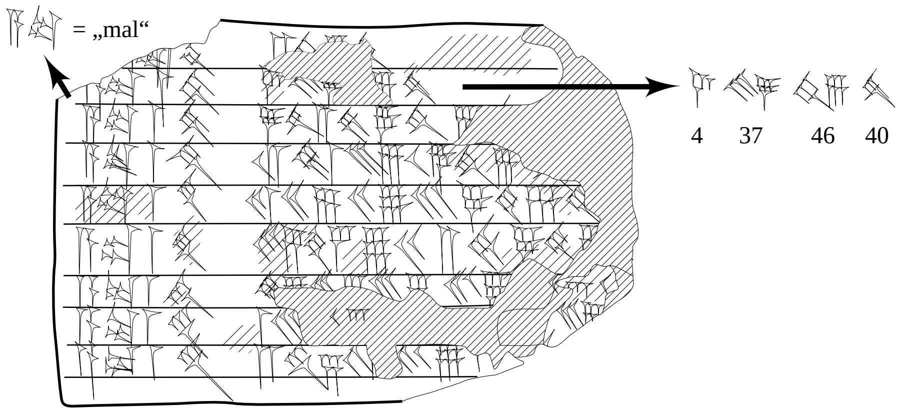


Abbildung 4: Altbabylonische Schülerübung (BM 22706) mit der Berechnung von Potenzen einer Zahl. Welche ist es?

Aufgabe H 3:

(1) Abbildung 4 gibt die Rechenübung eines Schülers einer altbabylonischen Schreiberschule wieder. Eine Zahl, die in der linken oberen Ecke weggebrochen ist, wird bis zur zehnten Potenz mit sich selbst multipliziert. In der ersten Zeile ist das Quadrat der Zahl nicht mehr lesbar. In der zweiten Zeile ist jedoch die dritte Potenz der Zahl gerade noch zu erkennen. Sie lautet $(4\ 37\ 46\ 40)_{60}$. Wie lautet die weggebrochene Grundzahl in dezimaler Notierung?

(2) Wie lautet die Sexagesimaldarstellung der Zahlen 50903 und 201355?

(3) Das Stellenwertsystem der altbabylonischen Schreiber war allerdings nicht vollkommen. Beispielsweise enthält die fünfte Zeile als sechste Potenz die Zahl $(21\ 26\ 29\ 37\ 46\ 40)_{60}$. Korrekt wäre jedoch $(21\ 26\ 0\ 29\ 37\ 46\ 40)_{60}$, aber die babylonischen Schreiber hatten die Null noch nicht erfunden. Infolgedessen lautet bei ihnen die nächste Zeile $(35\ 44\ 9\ 22\ 57\ 46\ 40)_{60}$, korrekt wäre jedoch $(35\ 43\ 20\ 49\ 22\ 57\ 46\ 40)_{60}$. Die folgenden Zeilen sind dann restlos fehlerhaft. Bisweilen kann es also zu Problemen beim Lesen von Keilschrift-Notationen kommen:

𒁹𒌋 - steht dies für „70“ („60 + 10“) oder für „3610“ („60^2 + 10“)?

𒁹𒁹 - steht dies für „2“ oder für „61“ oder für „120“?

𒁹𒁹 𒁹𒁹 - steht dies für „2·60 + 2“ oder für „2·60^2 + 2“ oder für „2·60^2 + 2·60“?

Wie könnte man sich hier helfen?

Auch in Ägypten waren es die Diener des zentral verwalteten Staates, die zur Kontrolle der Wirtschaft Zahlzeichen und Regeln zu ihrer Verwendung erfanden und in ihren Schulen die verwendeten Methoden zu einer „ägyptischen Mathematik“ verallgemeinerten. Im Gegensatz zur babylonischen Mathematik ist uns diese ägyptische Mathematik aber nur durch sehr wenige Quellen überliefert, insbesondere durch zwei Papyri aus der Zeit des „Mittleren Reiches“ (2060-1580 v.Chr.), dem Moskauer Papyrus (Buchrolle von 5,44 m Länge und 8 cm Breite) und dem Papyrus Rhind (Buchrolle von 5,34 m Breite und 33 cm Breite). Die Ägypter erfanden ein Zahlzeichensystem, das auf Individualzeichen für die Zehnerpotenzen beruhte. In der hieroglyphischen Form sind dies die folgenden Zeichen:

1 = 𓏺 10 = 𓎆 100 = 𓍢 1000 = 𓆼 10000 = 𓂭 100000 = 𓆐 1000000 = 𓁨

Wie in der Keilschrift wurden auch hier die übrigen Zahlen durch Zeichenwiederholungen dargestellt.

Beispiel: $243 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3$ 𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺.

Eigentümlich ist das Verfahren der Multiplikation, das die Ägypter für diese Zeichen und ihre schreibtechnisch vereinfachten, „hieratischen“ Formen entwickelten. Bei der Lösung der Aufgabe 79 des Papyrus Rhind wird beispielsweise das Produkt 7 · 2801 wie folgt berechnet:

/	1	2801
/	2	5602
/	4	11204
	7	19607

An anderer Stelle findet sich für das Produkt 12 · 23 die folgende Rechnung, wobei mit dem Zeichen „/“ diejenigen Zeilen markiert wurden, die abschließend zu addieren sind:

1	23
/ 10	230
/ 2	46
12	276

Die „ägyptische Multiplikation“ beruhte also auf dem Verdoppeln und gelegentlich dem Verzehnfachen des einen Faktors, der Kombination des anderen Faktors aus den Potenzen der Zahl 2 und aus der Zahl 10 und schließlich der Addition der dieser Zerlegung entsprechenden Teilprodukte zum Gesamtprodukt.

Aufgabe H 4:

(1) Lösen Sie folgende Aufgaben mit Hilfe der „ägyptischen Multiplikation“:

14 · 35 ; 23 · 46; 12 · 12.

(2) Beschreiben Sie das Verfahren der „ägyptischen Multiplikation“ allgemein; begründen Sie, warum die „ägyptischen Multiplikation“ stets für natürliche Zahlen a und b ausführbar ist.

(3) Vergleichen Sie die „ägyptischen Multiplikation“ mit der Ihnen vertrauten schriftlichen Multiplikation im Dezimalsystem. (Zur Division siehe man die Aufgabe H 15.)

1.3 Endliche Zeit und unendliche Wiederkehr - Kalenderzyklen der Maya: das „rechnerische Jahr“ und der Tzolkin-Zyklus

Ein Blick auf die Kalenderrechnung der Maya von Mittelamerika erhöht ein weiteres Mal die Farbigkeit des Bildes der noch nicht „natürlich“ erscheinenden Zahl. Die Maya bewohnten und bewohnen zum Teil noch immer Teile Mittelamerikas, die heute zu Mexiko, Guatemala, Honduras und El Salvador gehören. Die Blütezeit dieser Kultur, die sogenannte „klassische Periode“, fällt in die Zeit etwa von 300 bis 900 n.Chr., also in eine Zeit lange vor der Entdeckung Amerikas durch Kolumbus (1492), die schließlich zur fast vollständigen Zerstörung dieser Kultur führte. Nur wenige ihrer Codices entgingen der systematischen Verbrennung durch die spanischen Eroberer. Diesen Codices liefern wichtige Hinweise für das Verständnis der zahlreichen Kalenderangaben auf den erhaltenen steinernen Monumenten. Insbesondere kennen wir die Zahlzeichen der Maya, die in vielen Varianten geschrieben wurden und deren Grundform hier in Abbildung 5 wiedergegeben ist.

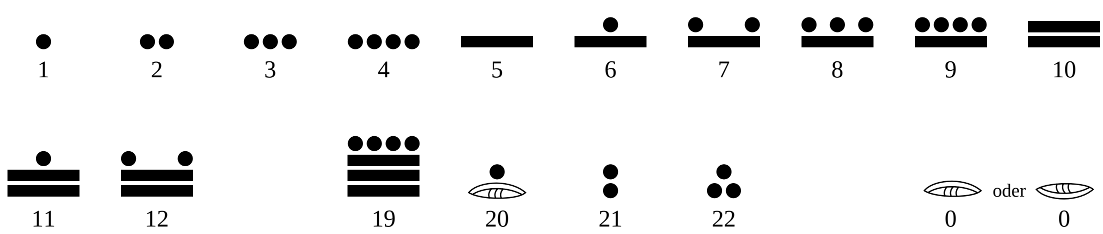


Abbildung 5: Zahlzeichen der Maya

Wie wurden diese Zahlzeichen verwendet? Im Dresdner Kodex, vermutlich eine um 1200 n.Chr. hergestellte Nachschrift eines Textes der klassischen Periode, findet sich die in Abbildung 6 im Orginal und in dezimaler Umschrift wiedergegebene, tabellarische Auflistung nummerischer Werte.

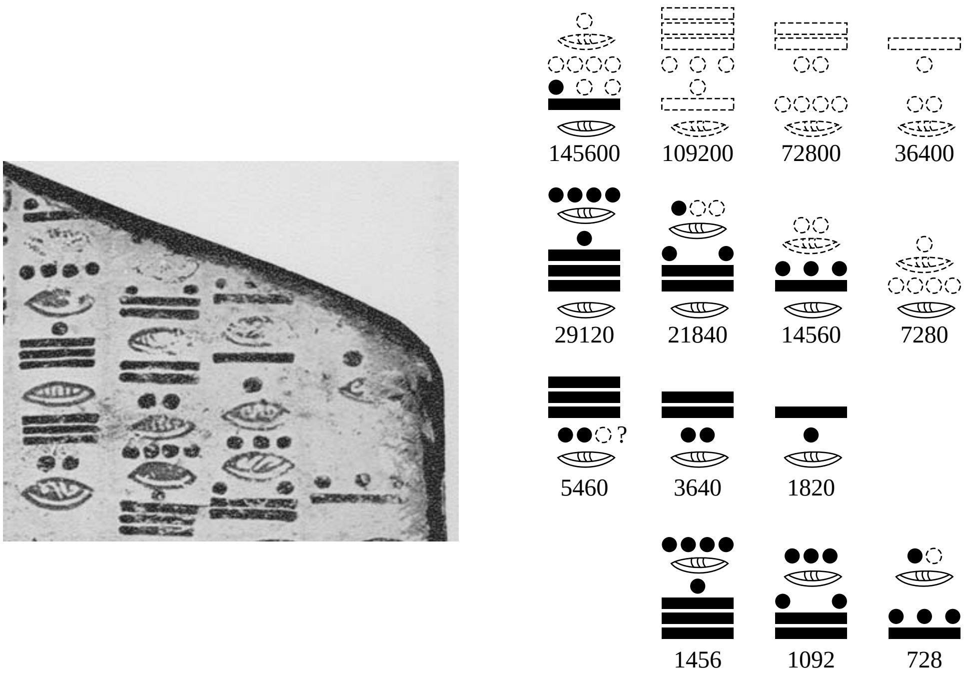


Abbildung 6: Ausschnitt von Folio 45a des Dresdner Kodex und hypothetische Rekonstruktion der zerstörten Partien und der nummerischen Werte durch J. E. S. Thompson (1942, Fig. 2, mit Korrektur 1972, S. 109f.)

Aufgabe H 5:

(1) Welche Vielfachen der Tage eines angenäherten Kalenderjahres werden in dem in Abbildung 6 eines Ausschnitts von Folio 45a des Dresdner Codex dargestellt? Mit wie vielen Tagen wurde das sogenannte „rechnerische" Kalenderjahr dabei gerechnet?

(2) Benutzen Sie die von Thompson vorgeschlagene Rekonstruktion der nummerischen Werte des Ausschnitts von Folio 45a des Dresdner Codex, um herauszufinden, wie die Maya in diesem Fall die Zahlen notierten.

Die Maya verwendeten zahlreiche verschiedene Kalenderzyklen. Wichtiger als das „rechnerische" Jahr waren der weltliche, dem Sonnenjahr besser angepaßte „Haab"-Zyklus, von dem weiter unten noch die Rede sein wird, und der liturgisch-religiöse „Tzolkin"-Zyklus, mit dem wir uns hier zunächst befassen wollen. Im Tzolkin gab eine feste Abfolge von 20 durch Glyphen bezeichneten Tagen (Imix, Ik, Akbal, ...). Dieser Zyklus wurde mit einem zweiten Zyklus von 13 bezifferten Tagen kombiniert (siehe das Schema in Abbildung 7). Beide Zyklen wurden gleichzeitig weitergezählt. Jeder Tag war damit durch eine Kombination von einem Namen und einer Zahl gekennzeichnet. Die Angabe „13 Akbal" bedeutete beispielsweise, daß im Zyklus der Tagesnamen der Tag Akbal und im Zyklus der nummerierten Tage der dreizehnte Tag erreicht war. „5 Muluc" bedeutet, der Tagesname ist Muluc und zugleich ist es der 5. Tag im Zyklus der 13 Tage.

Imix	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7
Ik	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8
Akbal	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9
Kan	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10
Chicchan	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11
Cimi	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12
Manik	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13
Lamat	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1
Muluc	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2
Oc	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3
Chuen	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4
Eb	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5
Ben	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
Ix	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7
Men	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8
Cib	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9
Caban	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10
Eznab	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11
Cauac	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12
Ahau	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13

Abbildung 7: Die Abfolge der Tage des Tzolkin von 1 Imix bis 13 Akbal.
Die Tabelle ist spaltenweise von links nach rechts zu lesen.

Aufgabe H 6:

(1) Im Tzolkin, dem religiösen Kalender, war das Jahr mit 260 Tagen festgesetzt. Warum?

(2) Wie viele Tage sind es vom Beginn des religiösen Jahres „1 Imix“ bis zum Tag „13 Akbal“, bis zum Tag „5 Muluc“ und bis zum Tag „9 Imix“.

(3) Im religiösen Jahr sei der Tag „13 Akbal“ gegeben.

- Welche Zykluszahl haben die folgenden Tage Kan, Chicchan, Cimi sowie die Tage Eb, Caban, Ahau?
- Wie viele Tage können vergangen sein, wenn man den Tag Manik oder Ahau hat?
- Welchen Tag und welche Zykluszahl hat man nach 360 (364, 365, 819) Tagen?
- Können Sie ein allgemeines Verfahren entwerfen und anwenden, um von einem beliebigen Datum innerhalb des religiösen Jahres ausgehend, das Datum (Zykluszahl und Tag) zu ermitteln, welches n Tage später (oder früher) liegt?

1.4 Das Gerade und das Ungerade

Aus der Perspektive der europäischen Kulturtradition ist die Zeitspanne von Thales von Milet (etwa 624 - etwa 548 v.Chr.) bis Euklid (etwa 365 - etwa 300 v.Chr.) von ausschlaggebender historischer Bedeutung, denn sie hat die Mathematik als beweisende Wissenschaft hervorgebracht. Von den älteren Pythagoreern (6. Jahrhundert v.Chr.) ist bekannt, daß sie sich intensiv mit figurierten Zahlen (Polygonalzahlen) beschäftigt haben). Die dabei benutzten Rechensteine (*ψῆφοι* - psephoi; lat.: calculi) stammten aus der alltäglichen Rechenpraxis, wurden hier jedoch zweckentfremdet zur Begründung arithmetischer Zusammenhänge verwendet, also als Mittel des mathematischen Denkens.

Aus dieser pythagoreische Tradition ging auch die „Lehre vom Geraden und Ungeraden“ hervor, die uns als ein zusammenhängendes Theoriestück im Buch IX der *Elemente* des Euklid mit den Theoremen 21 bis 34 überliefert worden ist, wenn auch wahrscheinlich nicht in ihrer ursprünglichen, auf dem Operieren mit figurierten Zahlen beruhenden Form:

(21) Setzt man beliebig viele gerade Zahlen zusammen, so ist die Summe gerade.
(22) Setzt man beliebig viele ungerade Zahlen zusammen und ist die Anzahl gerade, so muß die Summe gerade sein.
(23) Setzt man beliebig viele ungerade Zahlen zusammen und ist die Anzahl ungerade, so muß auch die Summe ungerade sein.
(24) Nimmt man von einer geraden Zahl eine gerade weg, so muß der Rest gerade sein.
(25) Nimmt man von einer geraden Zahl eine ungerade weg, so muß der Rest ungerade sein.
(26) Nimmt man von einer ungeraden Zahl eine ungerade weg, so muß der Rest gerade sein.
(27) Nimmt man von einer ungeraden Zahl eine gerade weg, so muß der Rest ungerade sein.
(28) Entsteht eine Zahl dadurch, daß eine ungerade Zahl eine gerade vervielfältigt, so muß das Produkt gerade sein.
(29) Entsteht eine Zahl dadurch, daß eine ungerade Zahl eine ungerade vervielfältigt, so muß das Produkt ungerade sein.
(30) Eine ungerade Zahl muß, wenn sie eine gerade Zahl mißt, auch deren Hälfte messen.
(31) Wenn eine ungerade Zahl gegen irgendeine Zahl prim ist, dann muß sie auch gegen deren Doppeltes prim sein.
(32) Jede der Zahlen, die durch Verdoppelung von der Zwei aus entstehen, ist ausschließlich gerademal gerade.
(33) Eine Zahl, deren Hälfte ungerade ist, ist ausschließlich gerademal ungerade.
(34) Wenn eine (gerade) Zahl weder zu denen gehört, die durch Verdoppelung von der Zwei aus entstehen, noch eine ungerade Zahl als Hälfte hat, dann ist sie sowohl gerademal gerade als auch gerademal ungerade.

Aufgabe H 7:

(1) Formulieren Sie für die Begriffe „gerade“ und „ungerade“ natürliche Zahl eine für die Begründung der Theoreme der Lehre vom Geraden und Ungeraden Ihrer Ansicht nach gut verwendbaren Form. Versuchen Sie außerdem eine zweite Form der Definitionen zu geben, die an die Rechenstein-Arithmetik mit figurierten Zahlen anknüpft.

(2) Die Vermutung, daß die Lehre vom Geraden und Ungeraden ursprünglich mit Hilfe von Rechensteinen aus figurierten Zahlen gewonnen wurde, kann sich auf ein Fragment des Komödiendichters Epicharmos (um 500 v.Chr.) stützen:

> „Wenn einer zu einer geraden Zahl, meinethalben auch einer ungeraden, einen Stein zulegen oder von den vorhandenen einen wegnehmen will, meinst Du wohl, sie bliebe dieselbe?“

- Formulieren Sie das Zitat von Epicharmos so in eine Aussage - oder in Aussagen - um, daß sich damit Sätze der Lehre vom Geraden und Ungeraden begründen lassen.
- Begründen Sie die von Ihnen formulierten Aussagen, und zwar

  a) einmal mit Hilfe der Rechenstein-Arithmetik,

  b) zum anderen mit Hilfe Ihres (schul-)algebraischen Wissens oder in einer sonstigen Form, die Sie für überzeugend ansehen.

(3) Versuchen Sie für die Aussage 28 aus dem Buch IX der „Elemente“ zweierlei Begründung zu finden, und zwar wiederum

a) einmal mit Hilfe der Rechenstein-Arithmetik,

b) zum anderen mit Hilfe Ihres (schul-)algebraischen oder sonstigen Wissens.

(4) Schaut man bei Euklid nach, wie dort die Aussage 28 des Buches IX begründet wird, so findet man:

> „Entsteht eine Zahl dadurch, daß eine ungerade Zahl eine gerade vervielfältigt, so muß das Produkt gerade sein.
>
> c entstehe dadurch, daß eine ungerade Zahl a eine gerade b vervielfältigt. Ich behaupte, daß c gerade ist.
>
> a _ _ _ b _ _
>
> c _ _ _ _ _ _
>
> Da a, indem es b vervielfältigt, c bildet, so ist c aus soviel Zahlen = b zusammengesetzt, wie a Einheiten enthält (VII, Def. 15). Nun ist b gerade; c ist also aus geraden Zahlen zusammengesetzt. Setzt man aber beliebig viele gerade Zahlen zusammen, so ist die Summe gerade (IX, 21); also ist c gerade - q.e.d.“

Versuchen Sie den Unterschied der Begründung bei Euklid im Vergleich zu einer möglichen Begründung durch das Operieren mit Rechensteinen und figurierten Zahlen herauszuarbeiten.

1.5 Das Rechnen mit dem Abakus

Ein leistungsfähiges technisches Hilfsmittel des Rechnens ist der Abakus, dem man in verschiedenen Formen in vielen Kulturen und zu unterschiedlichen Zeiten begegnet. In seiner Grundform ist der Abakus ein Rechenbrett, auf dem man Zahlen darstellen und verrechnen konnte, und zwar

- mit Hilfe von Rechensteinen oder Münzen, die auf dem Brett ausgelegt und verschoben werden (Münz-Abakus im antiken Griechenland, im antiken Rom und in Etrurien, im europäischen Mittelalter bis in die Neuzeit hinein weiterhin in Gebrauch),
- mit Hilfe von Stäbchen aus Bambus, die durch ihre Anzahl und Konfiguration auf dem Brett Zahlen repräsentierten (Stäbchen-Abacus „chóu suàn“ im alten China, um 600 n.Chr. mit der Bezeichnung „sansi“ in Japan übernommen),
- mit Hilfe von beweglichen Kugeln, die durch Schlitze, dünne Stäbe oder Drähte geführt werden (Kugel-Abakus im antiken Rom, im europäischen Mittelalter bis in die Neuzeit hinein weiterhin in Gebrauch, ferner mit der Bezeichnung „suàn pán“ in China (suàn pán), um 1600 n.Chr. mit der Bezeichnung „soroban“ in Japan übernommen und ebenso wie in Rußland mit der Bezeichnung „stschoty“ bis in die Gegenwart hinein verwendet),
- mit Hilfe von Zeichen im Sand (Sand- oder Staub-Abakus im antiken Griechenland, im antiken Rom, in Arabien und in Persien).

Als Beispiel soll hier der Abakus antik-römischer Herkunft näher betrachtet werden. „Rechnen“ hieß bei den Römern „calculos ponere“, wörtlich: Rechensteine setzen oder legen, oder auch „calculos subducere“, Rechensteine ziehen. Das Verb „calculare“ taucht dagegen erst im Spätlateinischen auf. Der römische Abakus, auf dem die Steine ausgelegt und gezogen wurden, bestand aus Spalten die durch Kopfzahlen gekennzeichnet waren, und zwar (von rechts nach links) durch die römischen Zahlzeichen für 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 und 10^6. Mit diesem Abakus ließen sich die Zahlen in einer anderen Form darstellen als mit den römischen Ziffern, und zwar in einer Form, die dem uns vertrauten dezimalen Stellenwertsystem analog ist (siehe Abbildung 8).

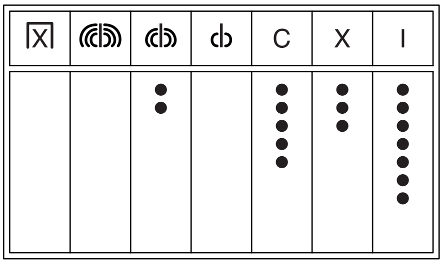


Abbildung 8: Darstellung der Zahl 20537 auf dem römischen Abakus

Bei einer weiterentwickelten Version des römischen Abakus war oberhalb der Kopfzeile eine weitere Zeile für jeweils eine Kugel mit dem fünffachen Wert hinzugefügt (siehe Abbildung 9), so daß man unterhalb des Steges mit der „Kopfzeile“ nurmehr jeweils höchstens 4 Kugeln zusätzlich zu der jeweils einen Kugel der oberen Zeile benötigte, um jede natürliche Zahl darzustellen. Überzeugen Sie sich von diesem Sachveralt, und überlegen Sie, wie viele Rechensteine für die beiden Formen maximal benötigt wurden!

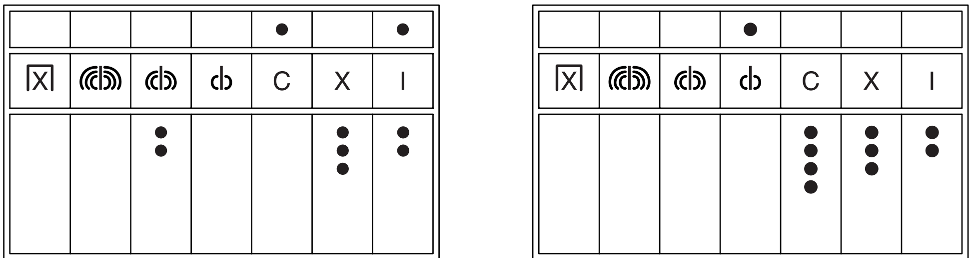


Abbildung 9: Darstellung der Zahlen 20537 (links) und 5432 (rechts) auf dem weiterentwickelten römischen Abakus

Eine besondere Ausführung des römischen Abakus, der Handabakus, kann als eine Frühform des Taschenrechners angesehen werden. Bei dieser Konstruktion wurden an Stelle der Rechenssteine des Rechenbretts kleine Kugeln auf einer etwa handgroßen Bronzetafel hin und her geschoben, die durch Schlitze geführt wurden (siehe Abbildung 10).

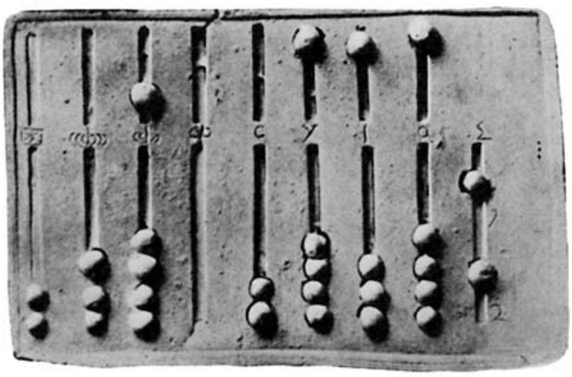


Abbildung 10: Römischer Handabakus

Aufgabe H 8:

(1) Klären Sie - mit Nachschlagewerken ebenso wie in Gesprächen mit anderen - alltagssprachliche wie fachspezifische Bedeutungen zu folgenden Bezeichnungen wie Formulierungen, in denen sie vorkommen: kalkulieren, Kalkulation, Kalkül. (Sie können auch fremdsprachliche Bedeutungen mit einbeziehen - z.B. engl. „calculus“ oder frz. „calculer“.)

(2) Lösen Sie folgende Additions- bzw. Subtraktionsaufgaben, indem Sie in einer geeigneten Form mit Steinchen oder ähnlichen Symbolen die Operationen auf dem römischen Rechen-stein-)Abakus in seiner ursprünglichen oder in der weiterentwickelten Form nachvollziehen (oder basteln Sie sich einen Handabakus):

(a) 20 537	(b) 5 273	(c) 20 537	(d) 5 273
+ 5 432	+ 2 354	- 10 412	- 4 181

Formulieren sie die Regeln im Sinne einer „Gebrauchsanleitung“ für den römischen Abakus!

(3) Vergleichen Sie das Vorgehen beim Abakus der älteren und dem der weiterentwickelten Form. Vergleichen Sie zudem die Berechnungen mit dem Abakus mit der Ihnen vertrauten schriftlichen Addition bzw. Subtraktion mit Ziffernnotationen im dezimalen Stellenwertsystem. Warum benötigt man beim Rechnen mit dem Abakus keine Null?

(4) Schon in der Antike wurde der Abakus auch zum Multiplizieren benutzt, aber die genauen Regeln sind nicht überliefert. Versuchen Sie ein Verfahren zu finden, wie man mit dem Abakus multipliziert haben könnte, und formulieren Sie die Regeln des von Ihnen gefundenen Verfahrens. Falls Sie Schwierigkeiten haben, die Aufgabe zu lösen, können sie in den Büchern von Menninger (1979) und Ifrah (1986) nachschlagen. Sie werden dort Hinweise finden, wie die Griechen und die Römer vermutlich mit dem Abakus multipliziert haben.

1.6 „Abacisten“ contra „Algoristen“

Gegen Ende des Mittelalters entstand dem Rechnen mit dem Abakus eine ernsthafte Konkurrenz, und zwar durch eine auf dem dezimalen Stellenwertsystem beruhende Form des schriftlichen Rechnens, dem „algorismus“ oder „algorithmus“. Der aus Indien stammende Gebrauch von Ziffern mit dezimaler Stellenwertgliederung ist Europa durch die Araber vermittelt worden, insbesondere durch das im 12. Jahrhundert durch Robert von Chester ins Lateinische übersetzte Rechenbuch von Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi (auch: al-Hwarizmi, etwa 780-850 n.Chr., Bagdad), in welchem die Handhabung der indischen Ziffern zur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gelehrt wurde. Dieser Text begann mit der Formulierung „Dixit algorizmi“, „Algorizmi hat gesprochen“. In der Folgezeit wurde das Wort „algorismus“ oder „algorithmus“ zur Bezeichnung für derartige Rechenbücher verallgemeinert und insbesondere für die schriftlichen Rechenverfahren in der dezimalen Stellenwertdarstellung verwendet, die durch diese Bücher verbreitet wurden. Zu den einflußreichsten dieser Bücher gehört die Schrift „Liber abaci“ (1202) des Leonardo von Pisa (Fibonacci), der für sich in Anspruch nahm, „zum erstenmal das indische Rechnen im wirklichen, täglichen Lebens des Kaufmanns“ zu behandeln. Der französische Mönch Alexander de Villa Dei (um 1240) begann seine in Hexametern verfaßte Einführung in die neue Rechenweise „De arte numerandi“ mit den Worten:

„Hier beginnt der Algorismus.
Diese neue Kunst heißt Algorismus,
in der wir aus diesen zweimal fünf Ziffern
0 9 8 7 6 5 4 3 2 1
der Inder Nutzen ziehen ...“
(Übersetzung: Menninger 1958, Band 2, S. 227)

Etwa von der Mitte des 15. Jahrhunderts an waren, vor allem in den größeren Handelsstädten wie z.B. Nürnberg, Rechenmeister dazu übergegangen, gegen Entgelt Rechenunterricht zu erteilen, insbesondere den Söhnen überregional agierender Kaufleute. Diese Rechenmeister verfaßten auch Rechenbücher, die ab der Mitte des 15. Jahrhunderts n.Chr. nach dem Aufkommen des Buchdrucks mit beweglichen Lettern weite Verbreitung fanden. Weiterhin wurde das Rechnen mit dem Abakus gelehrt, und zwar in der Form der „Rechnung auff den Linien“, bei der eine Schar von Linien auf dem Rechenbrett die Stellen des Dezimalsystems repräsentierten, aber der Ehrgeiz der Rechenmeister bestand jetzt darin, auch die „Rechnung mit der Feder“ zu lehren, die in der Folgezeit das Rechnen mit dem Abakus fast völlig verdrängte. Für diese Rechenmeister war die Auseinandersetzung zwischen den „Abacisten“, jenen, die noch mit einem modifizierten Abakusbrett rechneten, und den „Algoristen“, jenen, die mit Zifferndarstellungen im dezimalen Positionssystem schriftlich rechneten, klar zu Gunsten der letzteren entschieden.

Zu diesen Rechenmeistern gehörte auch der im deutschen Sprachraum sprichwörtlich gewordene Adam Ries (1492-1559) - im Volksmund auch „Adam Riese“ genannt. Ries wirkte, nach einem Aufenthalt in Erfurt, von 1522/23 an in der Bergbaustadt Annaberg, im Erzgebirge, und zwar im dortigen Bergamt, und außerdem als Rechenmeister in seiner eigenen Rechenschule. Bekannt wurde er vor allem durch sein zweites Buch von der „Rechenung auff der linihen und federn ...“, das 1522 in 1. Auflage erschien und bis 1656 mindestens 108 Auflagen erreichte. Während sich das erste Rechenbuch noch vollständig auf das Rechnung auf den Linien beschränkte, schlug dieses zweite Rechenbuch in einer didaktischen Stufenfolge den Weg vom Rechnen auf den Linien zum Ziffernrechnen ein. Dieses Buch vermittelt daher eine Vorstellung des unterschiedlichen Vorgehens von „Abacisten“ und „Algoristen“.

Multiplizieren „auf den Linien“

In dem zweiten Rechenbuch von Adam Ries findet sich im Kapitel „Von den Linien“ eine schematische Darstellung der Linien, auf denen bei der gebräuchlichen Form des Abakus gerechnet wurde (siehe Abbildung 11).

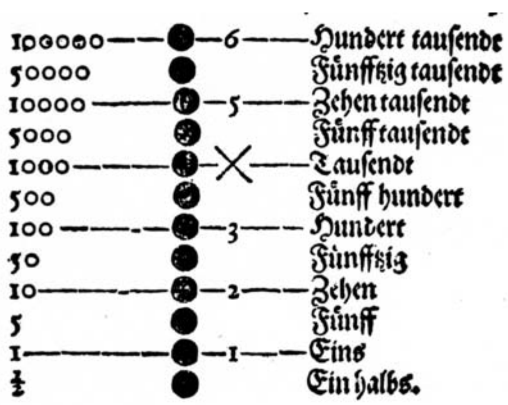


Abbildung 11: Schema zum Rechnen „auf den Linien“ von Adam Ries (Ausgabe 1574)

Ries erläutert die Linien dieses Schemas folgendermaßen:

> „Die erst und underste bedeut eins, die ander ob ihr zehen, die dritt hundert, die vierdt tausent. Also hinfürt die nechst darüber allweg zehen mal mehr denn die nechst darunder, unnd ein jeglichs spacium gilt halb soviel, als die nechst Linien darüber.“ (Ries 1574, S. 3)

Solche Linienschemata wurden auf Tischen aufgemalt oder auch in Tücher eingestickt. Die Markierung „X“ diente der Übersichtlichkeit. In ähnlicher Weise wie bei in Ziffern geschriebenen Zahlen die Stelle der Tausender durch einen Punkt über der Ziffer hervorgehoben wurde, wurde hier durch das Kreuz die Tausenderlinie des Abakus markiert. Dies war insbesondere darum zweckmäßig, weil oftmals die Kennzeichnung der Linien durch Ziffern auf der linken Seite des Schemas fehlte. Die ausbuchstabierten Zahlen auf der rechten Seite des Schemas waren ohnehin nur von Ries in seinem Lehrbuch hinzugesetzt und bei den Rechentischen und Rechentüchern selbst nicht vorhanden. Oftmals dienten die Rechentische und Rechentücher dem Umgang mit Geld, in diesem Fall war die dezimale Gliederung der Linienschar durch die Wertverhältnisse der Münzen ersetzt (siehe z.B. Menninger 1979, Bd. 2).

Abbildung 12: Abacist und Algorist unter den Augen der Arithmetica

Wie wurde „auf den Linien“ multipliziert? Ebenso wie schon bei Alchwarizmi gehen auch in dem Rechenbuch von Ries den Abschnitten über das Multiplizieren und Dividieren Erläuterungen zum Verdoppeln („Duplirn“) und Halbieren („Medirn“) voraus. Zum eigentlichen Multiplizieren betont Ries zunächst einmal, daß man dazu das Einmaleins auswendig lernen und gut kennen müsse. Dann fährt er fort zu beschreiben, was man mit den „Rechenpfennigen“, wie die vom 13. Jahrhundert an geläufige Form der Rechensteine genannt wurde, zu tun hat:

> „Zum Multiplizieren gehören zwei Zahlen - eine, die multipliziert wird, und eine andere, mit der man multipliziert. Die Zahl, die multipliziert werden soll, sollst du auflegen, die andere dir aufschreiben und oben anfangen.

Liegt ein Pfennig in einem Zwischenraum, so greife auf die Linie darüber und lege die aufgeschriebene Zahl halb, sofern du mit einer einzifferigen Zahl multiplizierst. Im Falle einer zweizifferigen Zahl aber greife auf die zweite Linie über dem Pfennig und lege dort die Ziffer des höchstens Stellenwertes halb. Sodann greife herab, lege die letzte Ziffer auch halb und hebe den Pfennig im Zwischenraum auf. Desgleichen soll man, wenn man mit drei-, vier- oder mehrzifferigen Zahlen multiplizieren will, über ebenso viele Linien greifen und von oben herab legen.

Wenn aber Pfennige auf der Linie liegen, so greife auf die oberste Linie. Multiplizierst du mit einer einzifferigen Zahl, so halte still und lege die aufgeschriebene Zahl dort so oft, wie Pfennige auf der Linie liegen. Handelt es sich aber um eine zweizifferige Zahl, so greife auf die nächste Linie über dem Pfennig. Dort lege die Ziffer des höchstens Stellenwertes so oft, wie Pfennige auf der Linie liegen. Danach greife herab, lege die letzte Ziffer auch so oft, wie Pfennige zu multiplizieren vorhanden sind, und hebe diese Pfennige auf. ..."

Zitiert nach der von S. Deschauer (1992) modernisierten Textfassung der Ausgabe von 1522.

Ries gibt anschließend eine Reihe von Beispielen, zunächst für Produkte mit einstelligem Multiplikator (siehe Abbildung 13), dann Beispiel für zwei- und dreistellige Multiplikatoren.

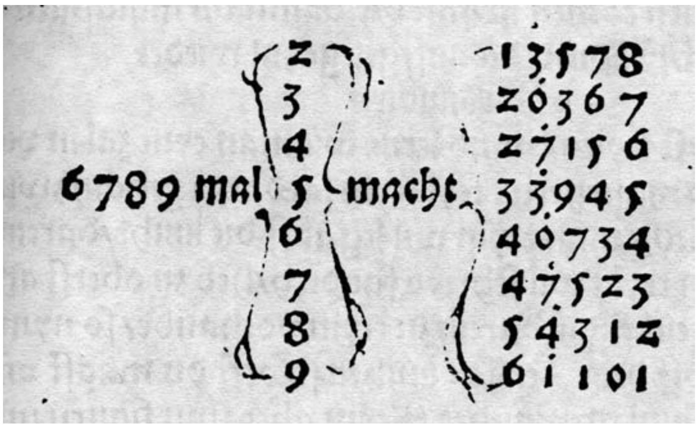


Abbildung 13: Beispiele der Multiplikation mit einstelligem Multiplikator im Kapitel über das Rechnen „auf den Linien" in der Ausgabe von 1522 des zweiten Rechenbuch von Adam Ries.

Aufgabe H 9:

(1) Zeichnen Sie sich einen Linienabakus und rechnen Sie einige der von Adam Ries angeführten oder auch selbstgewählte Beispiele von Multiplikationen nach seiner Anweisung über das Rechnen „auf den Linien" aus!

(2) Überlegen Sie sich, wie man die Anweisung von Adam Ries zu verstehen hat (oder gegebenenfalls modifizieren) muß, damit auch Ziffern ungerader Zahlen beim Multiplizieren korrekt verarbeitet werden! Wie kann man seine Anweisungen insgesamt begründen?

Multiplizieren „mit der Feder"

Vergleichen wir nun das Multiplizieren „auf den Linien" mit dem Multiplizieren „auf der Feder", wie es im zweiten Teil des Rechenbuchs von Ries gelehrt wird. Zunächst gibt Ries zwei „Regeln" an, wie man - alternativ zum auswendig gelernten Einmaleins - Produkte zweier einstelliger Faktoren berechnen kann. Dann beschreibt er, wie man mehrstellige Multiplikanden mit ein-, zwei- oder dreistelligen Multiplikatoren multipliziert:

> „Willst du nun eine Zahl mit einer Ziffer multiplizieren, so schreibe die Zahl, die du multiplizieren willst, oben und die Ziffer, mit der du multiplizieren willst, direkt unter die letzte Ziffer. Sodann multipliziere sie mit der letzten Ziffer. Kommt eine Zahl mit einer Ziffer heraus, so setze sie unten. Im Falle einer zweizifferigen Zahl schreibe die letzte Ziffer, die andere behalte im Sinn. Sodann multipliziere die untere Ziffer mit der zweitletzten der oberen Zahl und gib dazu, was du behalten hast. Schreibe abermals die letzte Ziffer und so fort. Zuletzt schreibe die Zahl ganz aus wie hier“ (Abbildung 14):

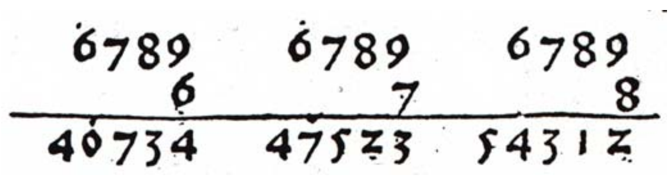


Abbildung 14: Multiplikation „auf der Feder“ mit einstelligem Multiplikator in der Ausgabe von 1522 des zweiten Rechenbuch von Adam Ries

> „Willst du eine Zahl mit zwei Ziffern multiplizieren, so führe es mit der letzten Ziffer so durch, wie eben gesagt. Sodann führe es auch in gleicher Weise mit der anderen Ziffer durch, setzte aber das Ergebnis um eine Ziffer weiter nach links eingerückt. Danach zähle zusammen wie hier“ (Abbildung 15):

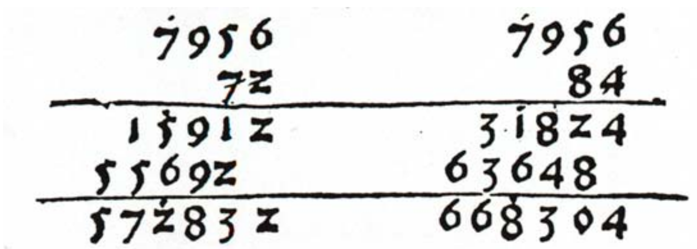


Abbildung 15: Multiplikation „auf der Feder“ mit zweistelligem Multiplikator in der Ausgabe von 1522 des zweiten Rechenbuch von Adam Ries

> „In gleicher Weise multipliziere auch mit drei oder mehr Ziffern, nur setze die Ergebnisse jeweils um eine Ziffer weiter eingerückt, ... “
>
> Zitiert nach der von S. Deschauer (1992) modernisierten Textfassung der Ausgabe von 1522.

Aufgabe H 10:

(1) Wie unterscheidet sich das Schema für die schriftliche Multiplikation bei Adam Ries von jenem, das Sie gewohnt sind? Inwiefern ist es im Wesentlichen gleich?

Für die Anordnung der Teilprodukte lassen sich historisch verschiedene Schreibweisen ausmachen. J. Tropfke (1980, S. 211 ff.) hat diese Schreibweisen klassifiziert und die sechs bzw. sieben Typen historischen Autoren zugeordnet. Die Netz- oder Gittermethode wird Ihnen in Form der „Neperschen Streifen“ in einem anderen Kapitel dieses Buches begegnen.

(2) Adam Ries gibt, so wie die anderen Rechenmeister auch, keinerlei Begründung für die beschriebenen Rechenverfahren an. Der Lernende hatte den Meister nachzuahmen und die Verfahren einfach so lange an Beispielen zu üben, bis er sie beherrschte. Diese didaktische Leitlinie teilen wir heute nicht mehr, wiewohl es durchaus möglich ist, Algorithmen zu lernen und korrekt auszuführen, auch ohne ihre Begründung zu verstehen.

- Wie sehen Sie die Beziehung zwischen der technischen Ausführung von Rechenverfahren und der Einsicht in deren Begründung?
- Stellen Sie sich einen „Abacisten" vor, der mit der Beschreibung des schriftlichen Rechnens nach Adam Ries konfrontiert wird. Wie könnte dieser reagieren?
- Adam Ries wählte bei der Darstellung des schriftlichen Multiplizierens die gleichen Beispiele wie beim Rechnen auf den Linien. Sie sollten dies als Anregung dazu auffassen, gleiche Beispiele des Rechnes auf den Linie und des schriftlichen Rechnes jeweils gegenüberzustellen und miteinander zu vergleichen.

2. Das Rätsel der Zahlen: ewig und doch historisch geworden!

Dieser zweite Teil 2. des Kapitels soll zu dem Versuch anregen, in die historisch-inhaltlichen Vielfalt der Geschichte des Zählens und Rechnens Ordnung zu bringen. Zahlen erscheinen uns einerseits als universell und ewig; andererseits ist die historische Form, in der sie erscheinen, ständigem Wandel unterworfen. Ist dies ein Widerspruch? Können Zahlen beides zugleich sein, universell und doch historisch veränderlich? Im Folgenden werden Informationen über den Kontext der voranstehenden Aufgaben gegeben, die dabei helfen sollen, diese merkwürdige Doppelnatur der Zahlen besser zu verstehen.

2.1 Psychologische und historische Untersuchungen zur Zahlbegriffsentwicklung - wie passen diese zusammen?

In der Geschichte der Philosophie gibt es eine lange Tradition, das menschliche Wissen in zwei Arten einzuteilen, in solches Wissen, das aus der Erfahrung stammt und daher sich durch neue Erfahrungen auch immer wieder als falsch oder ungenau erweisen kann, und solches Wissen, das unsere Vernunft aus sich selbst schöpft und das daher absolut gewiß ist und von keiner Erfahrung widerlegt werden kann. Als ein wichtiges Indiz, daß so ein nicht-empirisches Wissen tatsächlich existiert, sind vor allem „beweisbare" mathematische Kenntnisse angeführt worden, insbesondere unsere Kenntnisse der Eigenschaften der „natürlichen Zahlen". Zu den anscheinend unumstößlichen Wahrheiten, die wir im Denken und nur im Denken gewinnen können, gehört beispielweise die Tatsache, das sieben plus fünf gleich zwölf ist, oder die Tatsache, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. In der Tradition des Platonismus werden solche Einsichten als eine Form der „Erinnerung" an eingeborene Ideen angesehen, in der Tradition des Kantianismus als Konstruktionen unseres Intellekts, Wahrheiten „a priori", die als notwendige Bedingungen auch bei empirischen Erfahrungen stets vorausgesetzt werden.

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts ist dieses mathematische Wissen „a priori" selbst Gegenstand einer empirischen Disziplin geworden, der Psychologie, insbesondere der pädagogischen Psychologie und der Entwicklungspsycholgie, die an die pädagogischen Erfahrungen über die Entwicklung des Zahlbegriffs bei Kindern anknüpfen. Eine reiche Quelle neuer Erkenntnisse bildete auch die „Ethnomathematik", die die Abhängigkeit mentaler Konstrukte von kulturspezifischen Sozialisationsbedingungen deutlich macht.

Auf dieser erweiterten Bais von Erfahrungen hat insbesondere der Psychologe und Philosoph Jean Piaget mit seinen Untersuchungen über die Entwicklung der Intelligenz beim Kinde unser Verständnis des Zustandekommens von Kenntnissen „a priori“ revolutioniert. Piaget unterscheidet zwei Arten von Kenntnissen, die wir im Laufe unseres Lebens erwerben. Beide Arten resultieren aus unseren Handlungen. Die empirischen Kenntnisse abstrahieren wir von den Objekten unserer Handlungen und den Veränderungen, die wir an ihnen bewirken und die wir ihnen als immanente Möglichkeiten zuschreiben. Die mathematischen Kenntnisse dagegen abstrahieren wir durch „reflektierende Abstraktion“ von den Strukturen der Koordination unserer Handlungen selbst. Da zumindest einige dieser Strukturen sehr allgemeiner Natur sind und sowohl zwischen den Kulturen als auch historisch sich kaum verändern, erscheint uns das von ihnen durch Nachdenken über sie abstrahierte Wissen, nach Piaget das „mathematisch-logische Wissen“, als von den empirischen Gegenständen unabhängig. Zugleich klären Piagets Untersuchungen den engen Zusammenhang von empirischem und mathematischem Wissen. Da unsere Handlungen sowohl von den Objekten, auf die sie sich richten, auch auf von den Mitteln, die wir einsetzen, und damit von ihrer Struktur bestimmt sind, haben unsere Erkenntnisse notwendigerweise immer zugleich beide Aspekte, einen empirischen Inhalt und eine mathematisch-logische Form.

Piaget wollte vor allem das Zustandekommen von Erkenntnissen „a priori“ erklären und hielt an der scharfen Unterscheidung zwischen universellen Eigenschaften und empirischen Eigenschaften fest. Aber seine Untersuchungen haben uns darüberhinaus die Mittel an die Hand gegeben, gerade auch die kulturelle Verschiedenheit und historische Veränderung mathematischer Begriffe und Denkformen zu verstehen. Das Zählen und Rechnen ist nicht nur von sehr allgemeinen Koordinationen von Handlungen bestimmt wie zum Beispiel der Konstruktion von 1-1-Zuordnungen, wie sie Zählprozessen zugrunde liegen, sondern auch von den spezifischen Mitteln des Umgangs mit Zahlen wie beispielsweise von bestimmten symbolischen Darstellungen und Hilfsmitteln zum Ausführen von Rechenoperationen. So lassen sich die jeweiligen historisch belegbaren arithmetischen Mittel und äußeren Repräsentationen wie Zählsteine oder Rechenbretter, aber auch Symbol- oder Ziffernsysteme zur Darstellung und Verarbeitung von Zahlen als Verkörperungen kognitiver Strukturen deuten, die sich die Individuen in ihrer kognitiven Entwicklung im Umgang mit diesen Mitteln aneignen. In jeder historischen Epoche markieren daher solche Mittel den Entwicklungsstand der jeweiligen intersubjektiv verbindlichen arithmetischen Deutungsschemata einer Kultur.

Für eine produktive Auseinandersetzung mit historischen Beispielen zur Zahlbegriffsentwicklung erweist sich eine Unterscheidung zwischen Repräsentationen erster Ordnung sowie solchen zweiter und höherer Ordnung als hilfreich:

- Als Repräsentationen erster Ordnung sollen Verkörperungen realer Objekte durch andere Objekte oder Symbole gelten, mit denen gemäß gewissen Transformationsregeln die gleichen Handlungen ausgeführt werden können wie mit den realen Objekten selbst.

Beispiel 1: Zählsteine - wie auch vergleichbare räumlich-simultan handhabbare Zähl- und Rechenhilfen - sind Repräsentationen erster Ordnung, aus denen die Kardinalzahlstruktur der natürlichen Zahlen resultiert. Wenn solche Zählsteine den realen Objekten eindeutig zugeordnet sind, - etwa den Tieren einer Herde von Schafen oder Rindern -, dann kann man mit solchen Zählsteinen kardinale Transformationen des Vermehrens, Verminderns, Vereinigens, Abtrennens, Verteilens oder Aufteilens statt mit den Objekten selbst mit diesen Repräsentanten als symbolische Handlungen vollziehen.

Beispiel 2: Zahlwörter - wie auch vergleichbare zeitlich- oder räumlich-sukzessiv anordbare Gebilde - sind Repräsentationen erster Ordnung, aus denen die Ordinalzahlstruktur der natürlichen Zahlen resultiert. Wenn solche Zahlwörter ordinal, d. h. in der richtigen Größenfolge, zu den Größen oder quantifizierbaren Eigenschaften realer Objekte in Beziehung gesetzt sind, dann lassen sich, wiederum auf symbolischer Ebene, die gleichen ordinalen Operationen des Vergleichens oder des Bestimmens von Maxima und Minima vornehmen wie mit den verkörperten Größen selbst.

Repräsentationen erster Ordnung erlauben das Antizipieren von Handlungen in der jeweils verkörperten Realität, also die Planung und Kontrolle derselben. Zudem können sie, wie dies in der Pädagogik des Rechenunterrichts durch die Verwendung von strukturierten Modellen und konkretem Material zum Erwerb eines Verständnisses für den Zahlbegriff angestrebt wird, als Hilfsmittel für den Aufbau der historisch oder kulturell bedingter, kognitiver Strukturen beim Individuum fungieren.

- Als Repräsentationen zweiter und höherer Ordnung sollen Verkörperungen mental konstruierter Objekte durch andere Objekte oder Symbole gelten, mit denen - gemäß gewissen Transformationsregeln - analoge Operationen ausgeführt werden können wie mit den mental konstruierten Objekten.

Hier geht es also nicht mehr um Zuordnungen zwischen Repräsentationen erster Ordnung und realen Objekten und Handlungen mit ihnen; vielmehr entsprechen die Repräsentationen zweiter und höherer Ordnung Objekten und Operationen des Denkens, die das Ergebnis von Reflexion und Abstraktion sind und die, wie die natürlichen Zahlen, reale Objekte und Handlungen nur noch mittelbar verkörpern.

Beispiel 3: Konventionell festgelegte Zahlwörter - wie „eins“, „zwei“, „drei“, ... oder Symbole wie „1“, „2“, „3“, ... - sind von einer bestimmten Stufe der Zahlbegriffsentwicklung an Repräsentationen zweiter Ordnung, mit denen die mentalen Operationen abstrakter Zahlen wie Multiplikationen und Divisionen „mechanisch“ vollzogen werden können, wie etwa bei der Verwendung schriftlicher Rechenverfahren.

Beispiel 4: Die Verwendung des Wortes „Zahl“ sowie die auf Zahlen bezogenen Terminologie (z.B. „gerade“, „ungerade“, „Primzahl“), die Verwendung von Variablen als „allgemeine Zahlen“ wie das „abstrakte Rechnen“ mit Zahlzeichen unabhängig von konkreten Anwendungen stellen Repräsentationen höherer Ordnung des Zahlbegriffs dar. Sie machen es möglich, die algebraischen Aspekte des Zahlbegriffs zu elaborieren und Eigenschaften wie etwa die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen deduktiv abzuleiten.

2.2 Über die Geburtsstunde des Rechnens

Nach diesem theoretischen Exkurs und gewappnet durch die Entzifferungs-Erkundung in Abschnitt 1.1 (Aufgaben H 1 und 2) können wir uns nunmehr genauer mit den Ergebnissen der Entzifferung der ältesten entwickelten Rechentechnik der Welt beschäftigen. Den Ausgangspunkt soll eine scheinbar unwichtige Beobachtung bilden. Wie auch alle anderen Zahlzeichensysteme der frühen Hochkulturen unterscheiden sich die archaischen Zeichen der Protokeilschrift in der Form ihrer Anwendung von unseren modernen Zahlzeichen: Bei allen diesen Systemen kann man beobachten, daß die Grundzahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 (Die Null war ohnehin noch lange nicht erfunden!) nicht durch jeweils eigene Zeichen dargestellt wurden, sondern durch Reihung des Zeichens für die Zähl- oder Meßeinheit - für die Sechs gibt es beispielsweise in der Regel kein spezielles Zeichen, sondern sie wird durch eine sechsfache Wiederholung des Zeichens für die Einheit dargestellt. Solche Zeichendarstellung von Zahlen erinnern an den Ursprung dieser Zeichen. Sie standen zu irgendeiner Zeit nicht für Kardinalzahlen von Mengen sondern für die einzelnen oder gebündelten Objekte selbst.

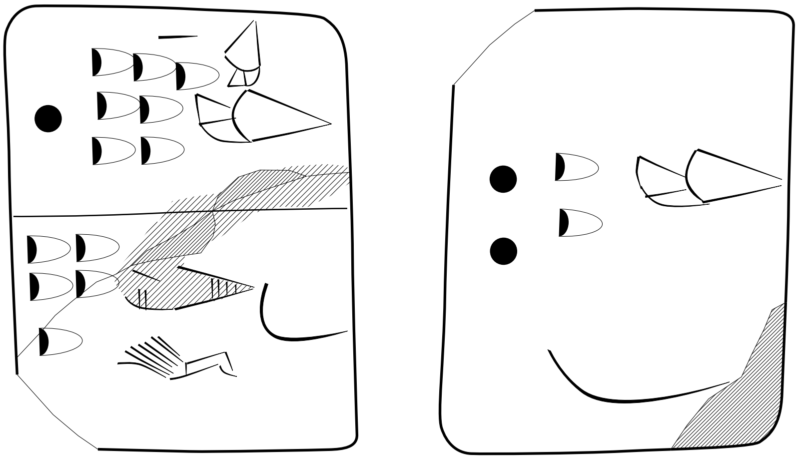


Abbildung 16: Vorder- und Rückseite eines in Protokeilschrift geschriebenen Wirtschaftstexts aus Uruk, der die Ausgabe von Bierkrügen zum Gegenstand hat (Tafel W 20676.2)

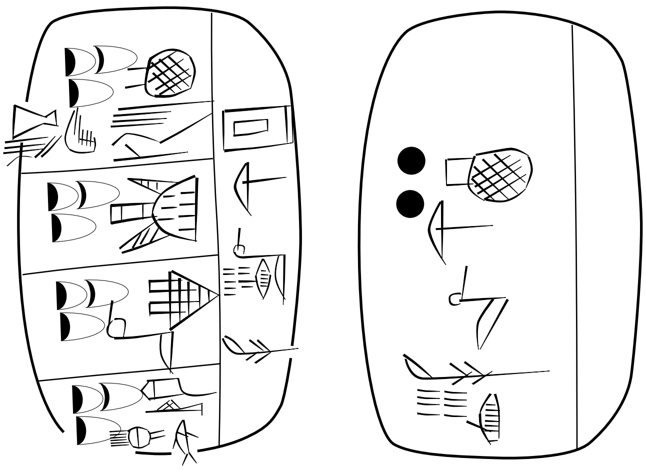


Abbildung 17: Vorder- und Rückseite eines in Protokeilschrift geschriebenen Wirtschaftstexts aus Uruk, der die Ausgabe von Krügen mit einem Getreideprodukt zum Gegenstand hat (Tafel W 15897,c21)

Die Abbildungen 16 und 17 geben jeweils die Vorder- und Rückseite von zwei archaischen Schrifttafeln der archäologischen Ausgrabungen der antiken Stadt Uruk (etwa 3 200 - 3 000 v.Chr.) wieder. Die Vorderseite der ersten dieser zwei Tafeln enthält zwei Eintragungen mit nummerischen Eintragungen über Bierkrüge, geschrieben mit den beiden Zahlzeichen ● und , die uns bereits aus der Aufgabe H 2 bekannt sind. Die Tafeln sind übrigens nach gängigen Konventionen in der Orientierung der späteren Keilschrift abgebildet. Dreht man die Tafeln um 90 Grad im Uhrzeigersinn in die Lage, in der sie geschrieben wurden, dann erkennt man leicht das Schriftzeichen für die Bierkrüge als Bild eines nach unten spitz zulaufenden Tonkruges mit einem Henkel. Auch die zweite Tafel enthält auf der Vorderseite Eintragungen über ein in Tongefäßen aufbewahrtes Getreideprodukt, in diesem Fall ein unten rund zulaufender Topf. Bei dieser Tafel ist viermal die gleiche Menge von drei Einheiten eingetragen, geschrieben mit dem Zeichen . Auf der Rückseite jeder der beiden Tafeln findet sich jeweils die Summe der Eintragungen der Vorderseite, beide Male mit den Zeichen ● und geschrieben. Verglichen mit der Text der Aufgabe H 2 scheint es ein Kinderspiel zu sein, aus den beiden Summen die Beziehung zwischen diesen beiden Zeichen zu ermitteln.

Hier jedoch ergibt sich jedoch ein Problem: Wenn die beiden Zeichen für Zahlen stehen, dann gibt es keine Zuordnung von Werten, die beiden Rechnungen genügt. Die Bündelung der Einheiten zu Einheiten ● kann jedenfalls in den beiden Fällen nicht die gleiche sein. Einer der beiden antiken Schreiber muß sich also verrechnet haben. Dies ist in der Tat die Schlußfolgerung, die Keilschriftforscher etwa fünfzig Jahre lang als einzig mögliche Erklärung für solche widersprüchlichen Rechnungen angesehen haben.

Es gibt jedoch auch noch eine ganz andere Erklärung für den scheinbaren Widerspruch zwischen den beiden Rechnungen. Wenn die Zeichen gar nicht für Zahlen stehen, sondern für spitze und runde Tongefäße, das Zeichen für kleine Gefäße und das Zeichen ● für große, dann gibt es gar keinen Grund mehr, daß in beiden Fällen genauso viele kleine Krüge in einen großen hineingehen. Theoretisch könnte in jedem Text ein anderes Verhältnis zwischen den Zeichen bestehen, wenn sie sich nur jeweils auf eine Andere Art von Gefäßen bezögen. Das uns vertraute Dezimalsystem hindert uns nur daran, diese Möglichkeit ernsthaft ins Auge zu fassen: 10 Einer sind stets 1 Zehner, 10 Zehner sind stets 1 Hunderter - unabhängig davon, ob wir die Zahlen als Maßzahlen für Getreide oder für Biertöpfe oder für Längen oder für Zeitspannen benutzen.

Welche der beiden Erklärungen ist die richtige? Stehen die Zeichen für Zahlen oder für Tongefäße? Besitzen sie also feste Werte oder können sie ihren Wert von Fall zu Fall nach den Gegebenheiten verändern?

Glücklicherweise haben die intensiven Arbeiten an der Entzifferung der Protokeilschrift in den letzten 20 Jahren auf diese Frage eine eindeutige Antwort ergeben. Die statistische Analyse der Zeichenkombinationen in den nummerischen Notierungen und die Rekonstruktion von Hunderten von vollständig oder unvollständig erhaltenen Summenbildungen hat unzweifelhaft gezeigt, daß die richtige Antwort genau in der Mitte der beiden Möglichkeiten liegt. Die archaischen Wirtschaftstexte dokumentieren ein kurzes Zwischenstadium zwischen der Repräsentation erster Ordnung von Wirtschaftsgütern und der Repräsentation zweiter Ordnung von nummerischen Größen ihrer quantitativen Erfassung. Sie repräsentieren weitgehend standardisierte Systeme von Beziehungen, die jedoch immer nur auf bestimmte Gegenstandbereiche angewendet werden. In diesen Systemen werden überwiegend die gleichen Zeichen verwendet, aber die nummerischen Werte und selbst die Größenabfolge der Zeichen kann sich vollständig ändern, wenn sie von einem System in das andere wechseln.

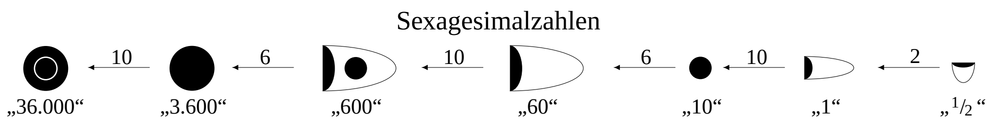


Abbildung 18: Zahlzeichensystem für die meisten gezählten Objekte, beispielsweise Menschen, Tiere, Behälter usw.

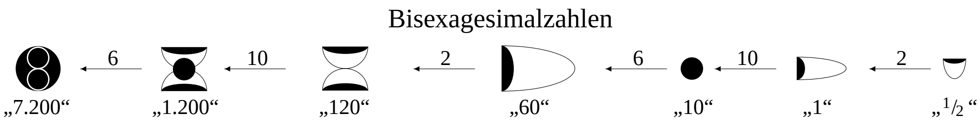


Abbildung 19: Zahlzeichensystem für rationierte gezählte Objekte, beispielsweise für Rationen von Gerste, Käse, Brot usw.

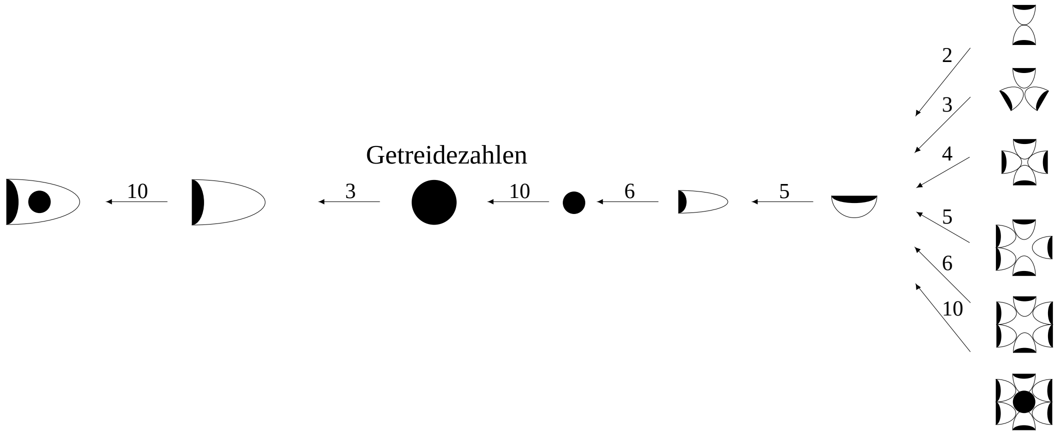


Abbildung 20: Zahlzeichensystem für Hohlmaße von Getreide

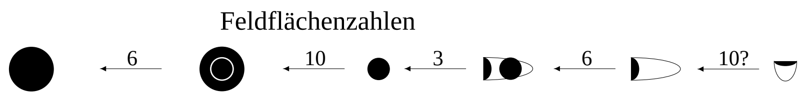


Abbildung 21: Zahlzeichensystem für Feldflächenmaße

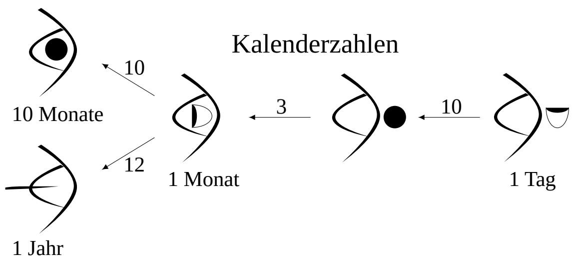


Abbildung 22: Zahlzeichensystem für Zeitspannen

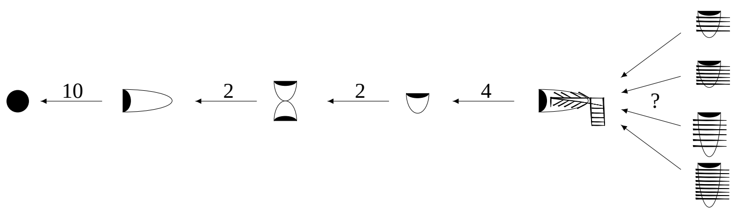


Abbildung 23: Zahlzeichensystem mit unbekanntem Anwendungsbereich

Insgesamt sind für die Protokeilschrift bislang sechs Grundsysteme von Zahlzeichen identifiziert worden (Abbildungen 18 bis 23). Zusätzlich zu diesen Grundsystemen gibt es eine Anzahl von Varianten mit den gleichen nummerischen Werten, aber anderem Anwendungsbereich, wodurch sich die Zahl der Systeme annähernd verdoppelt. Außerdem gibt es weitere, nur rudimentär für bestimme Größenbereiche ausgebildete Systeme. Schließlich gibt es auch, vermutlich als Relikt der vorangegangenen Entwicklungsstufe, die Verwendung von Schriftzeichen für Objekte als nummerische Zeichen für die Menge, die diese Objekte im Einzelfall repräsentieren. Beipielsweise stehen Schriftzeichen für Biersorten, für Getreiderationen oder für gebackene oder ungebackene Getreideprodukte in Rechnungen oftmals für die Menge des in einer Einheit enthaltenen Getreides. In diesem Fall trifft in der Tat der zweite der oben ins Auge gefaßten Möglichkeiten zu: die nummerischen Werte sind nicht vollständig standardisiert und schwanken in Abhängigkeit von der wechselndes Stärke des Biers, der wechselnden Größe der Ration oder der wechselnden Größe des Gebäcks.

In der Regel jedoch repräsentieren die Zahlzeichenkombinationen der archaischen Texte bereits standardisierte Aufgliederungen in abstrakte Meßeinheiten und nicht mehr real existierende Zähl- oder Meßeinheiten. Die Zusammenführung der Eintragungen der Vorderseite zu einer Gesamtnotierung auf der Rückseite bedeutet bei den beiden hier abgebildeten Tafeln beispielsweise nicht, daß die Gefäße tatsächlich von kleineren in größere Gefäße umgefüllt wurden. Die verschiedenartige Bündelung der Zeichen bei den beiden Tafeln besagt nur, daß die Produkte zwei verschiedenen Gegenstandsbereichen zugehörten, für die nicht das gleiche Zahlzeichensystem verwendet wurde, wobei aber in beiden Fällen die Relationen zwischen den Zeichen vollständig standardisiert waren. Anders ausgedrückt: Die Zeichen repräsentierten mehrere gegenstandsspezifischen Zahlsysteme und nahmen daher in Abhängigkeit vom Gegenstandsbereich mehrere, aber fest bestimmte nummerische Werte an. Insofern waren die-Zahlzeichen und Zahlenzeichenkombinationen Repräsentationen von mentalen Konstrukten, also Repräsentationen zweiter Ordnung. Den arithmetischen Techniken, die für diese Zeichen entwickelt wurden, fehlte aber noch ohne ein integrierendes, abstraktes Zahlkonstrukt.

2.3 Rechensysteme in frühen Hochkulturen

Die Wiege entwickelter Rechentechniken stand in den frühen Hochkulturen. So wie in den ersten städtischen Zentren Mesopotamiens mit der frühesten Schrift auch komplexe Zahlzeichensysteme entstanden, so haben auch alle anderen frühen Schriftkulturen Rechentechniken entwickelt, wenn auch, wie in den Beispielen zu Anfang bereits deutlich geworden ist, oftmals Zeichensysteme mit eigenartigen Strukturen. Eine Herausforderung, vor die uns die Rechensysteme in frühen Hochkulturen stellen, ist es, die Ursachen für ihre Verschiedenartigkeit zu verstehen.

Die Erfindung des sexagesimalen Positionssystems der babylonischen Mathematik

Den archaischen Zahlzeichensystemen fehlte die Zahl als integrierende mentale Konstruktion. Im Abschnitt 1.2 (Aufgabe H 3) wurde bereits deutlich, daß sich später, in den Texten der babylonischen Mathematik, diese Situation grundlegend geändert hat. Das sexagesimale Stellenwertsystem dieser mathematischen Keilschrifttexte wurde nicht nur auf beliebige Inhalte angewendet, sondern es war auch das erste System, dessen Operationen wie in der oben wiedergegebenen Schülerübung abstrakt, ohne jeden Bezug zu irgendeiner Anwendung eingeübt wurden. Zwischen diesen beiden Stufen einer Entwicklung von Rechenoperationen ohne integrierendem Zahlkonstrukt zu einer völlig abstrakten Notierung liegen allerdings eintausend Jahre eines vielfältigen und komplexen Entwicklungsprozesses. Dieser Prozeß brachte zunächst nur eine Vereinfachung der Schreibweise hervor, wie ein Vergleich der archaischen Zeichen mit den Zeichen der von den Tausenden Schreibern des Großreichs der III. Dynastie von Ur verdeutlicht (siehe Abbildung 24).

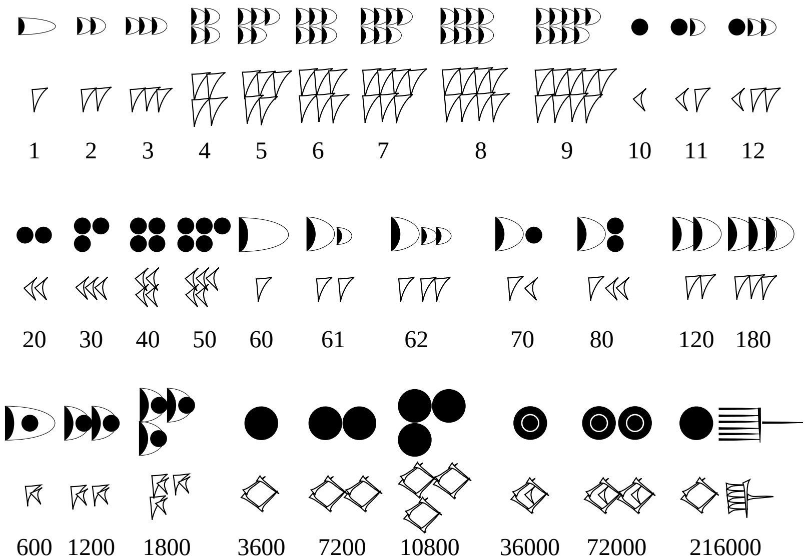


Abbildung 24: Vergleich der archaischen Sexagesimalzahlen (ca. 3000 v.Chr.) mit dem in der III. Dynastie von Ur (ca. 2100-2000 v.Chr.) verwendeten Sexagesimalsystem

Zahlzeichensysteme dieser Art, mit einer Zahldarstellung durch Zeichenwiederholung und ohne die Reduzierung der Zahl verschiedener Zeichen durch einen Stellenwert der Grundzeichen eignen sich besser als unser modernes, dezimales Stellenwertsystem zur Ausführung von Additionen, aber für die Ausführung von Multiplikationen sind solche Systeme nahezu ungeeignet. Es ist daher auch nicht verwunderlich, daß die Einführung der Stellenwertnotierung in der altbaylonischen Periode eine wahre Flut von rechentechnischen Erfindungen und Neuerungen nach sich zog.

Es ist weitgehend unbekannt, wann und wo sich die Erfindung des Stellenwertsystems ereignet hat und wie und in welchem Umfang sich seine Einführung vollzogen hat. Die Ursprünge liegen wahrscheinlich in dem enormen Anforderungen an die Rechentechnik im zentral verwalteten Ur-III-Reich. Eine zentrale Bedeutung kam dabei der Vereinfachung des Rechnens mit Brüchen zu, wie sie insbesondere bei Gewichtsmaßen anfielen. Das System der Gewichtsmaße war das jüngste der grundlegenden Maßsysteme, für die ein Notierungssystem gefunden werden mußte. Zur Zeit der archaischen Texte jedenfalls war die Waage offensichtlich noch nicht erfunden. Die frühesten Texte mit Gewichtsangaben finden sich einige hundert Jahre später in den Wirtschaftstexten der frühdynastischen Periode. Dieser späten Entstehung hatte das System der Gewichtsmaße es wohl zu verdanken, daß es wie die inzwischen etablierte sexagesimale Zählreihe streng sexagesimal gegliedert war:

1 gú (Traglast) = 60 mana (Mine)

1 mana (Mine) = 60 gín (Schekel)

Unter dieser Voraussetzung ließ sich für die Gewichtsmaße das Problem der Bruchteile eines Maßes einfach lösen. Das Ergebnis war die „Reziprokentafel“, die vielleicht wichtigste Rechentafel der Rechentechnik des sexagesimalen Stellenwertsystems, und vermutlich ging sogar die Erfindung des Stellenwertsystems selbst auf das Rechnen mit Gewichtsmaßen zurück. So ist beispielsweise:

$^{1}/_{3}$ gú = 20 mana
$^{1}/_{3}$ mana = 20 gín

Für ein Drittel schrieb man auch igi-3-gal, für ein Viertel igi-4-gál. Es ist daher verständlich, warum die babylonischen Schreiber in der Ur-III-Periode auf die Idee kamen, diese Beziehung in der folgenden Form zu tabellieren:

3 igi 20
4 igi 15
5 igi 12
6 igi 10
8 igi 7 30

Dabei haben die Zahlen der Tabelle die Eigenschaft, daß sie für jedes in 60 Teile untergliedertes Maß gelten und in jeder Zeile ihr Produkt gleich 60 ist. Jede der Zahlen ist also das Sechzigfache des Kehrwerts der ihr gegenüberstehenden Zahl.

Nun hatte allerdings die sexagesimale Stellenwertdarstellung eine merkwürdige Eigenschaft: Auch die Bruchteile wurden als ganze Zahlen dargestellt. Es gab kein Symbol die unserem Dezimalkomma entspricht, daß den ganzzahligen Teil einer Zahl von den Bruchteilen abtrennt. Diese Eigenschaft erklärt sich vielleicht aus der Herkunft von den Gewichtmaßen. Man kann die erste und letzte Zeile der Tabelle ja folgendermaßen lesen:

„3 igi 20“: $^{1}/_{3}$ einer Gewichtseinheit ist gleich 20 der 60 nächstkleineren Einheiten;

„8 igi 7 30“: $^{1}/_{8}$ einer Gewichtseinheit ist gleich 7 der 60 nächstkleineren Einheiten plus 30 der dann folgenden kleineren Einheiten.

Man konnte sich also stets eine so kleine Einheit denken, daß alle Zahlen ganze Zahlen sind, mußte dann aber den absoluten Wert des Ergebnisses, also die Lage des „Sexagesimalkommas“, aus dem Kontext erschließen. Die Notierungen in diesem System waren also Bezeichnungen für Äquivalenzklassen von Zahlen, die sich um eine Potenz der Basis 60 als Faktor unterschieden. Insbesondere betrachteten daher die die Babylonier die Zahlen der Reziprokentabelle bald in der Tat als Kehrwerte, denn ihr Produkt konnte ganausogut als 1 wie als 60 angesehen werden.

Wie soll man solche merkwürdigen „Zahlen“ modern umschreiben? In Abschnitt 1.2 haben wir eine moderne Darstellung gewählt. Man müßte also folgerichtig hier den Kehrwert von 8 nicht „7 30“ sondern „$(7\ 30)_{60}$“ umschreiben und zusätzlich deutlich machen, daß die ganze Äquivalenzklasse gemeint ist. Diese bei Mathematikern übliche Schreibweise für Zahlen in einer nichtdezimalen Darstellung findet bei Assyriologen und Mathematikhistorikern allerdings keine Anwendung, sondern bleibt dichter an der antiken Schreibweise. Will man nur ausdrücken, was wirklich auf der Tafel steht, dann trennt man die Stellen durch einen Punkt, schreibt also „7.30“. Will man dagegen zum Ausdruck bringen, welcher Absolutwert wirklich gemeint ist, dann trennt man die Stellen durch ein Komma und die Bruchteile von den Ganzen durch ein Semikolon ab. Man schreibt also je nachdem, wie die Zahl zu deuten ist, entweder „7,30“ oder „7;30“ oder „0;7,30“ etc. Auch wir werden hier im Folgenden diese Schreibweise verwenden.

Hatte man die babylonische Reziprokentafel in ihrer allgemeinen, von der speziellen Maßeinheit unabhängigen Form aufgeschrieben, dann lag es nahe, auch die Vielfachen der Zahlen und ihrer Kehrwerte zu tabellieren, zumindest die Vielfachen mit den Faktoren 2 bis 10 und den den Faktoren 30, 40 und 50. Das Ergebnis war ein Tabellenwerk, daß die Schwachstelle der bis dahin verwendeten Zahldarstellung beseitigte, ihre Unzweckmäßigkeit für das Multiplizieren und Dividieren. Im einfachsten Fall brauchte man, um eine Zahl mit einem Faktor zu multiplizieren nur in der Vielfachentafel nachschlagen und dann den Absolutwert des Ergebnisses aus dem Kontext erschließen. Um eine Zahl zu dividieren brauchte man nur den Kehrwert des Divisors in der Reziprokentafel zu suchen und mit diesem Kehrwert zu multiplizieren. Damit lag also in der Ur-III-Periode der Übergang vom herkömmlichen Sexagesimalsystem, das die Absolutwerte durch die Zeichen zum Ausdruck brachte, zu einem sexagesimalen Stellenwertsystems, bei dem alle Stellen gleichberechtigt waren, buchstäblich „in der Luft“.

Die ersten „Zahlzeichen“ mit kontextunabhängiger Bedeutung verdanken damit sowohl ihre Entstehung als auch ihre merkwürdige Form der Darstellung einem Prozeß der Reflexion, des Nachdenkens über die Eigenschaften der bis dahin existierenden Form der Repräsentation, und der anschließenden Konstruktion einer Repräsentation höherer Ordnung. Aus moderner Sicht ist dies nur die Erfindung einer zweckmäßigen Form der Darstellung der natürlichen Zahlen, aber woher sollten die Babylonier in der Lage sein, dieses Unterscheidung zu treffen? Woher sollten sie wissen, daß die Eigenschaft der Drei, eine Primzahl zu sein, die Eigenschaft einer natürlichen Zahl war, die Eigenschaft der Drei aber, daß ihr Kehrwert einen endlichen Wert besaß, nämlich den Wert 20, aber eine Eigenschaft der spezifischen Darstellung? Für die Babylonier war es nicht einmal sinnvoll, den Begriff der Primzahl zu bilden, denn bei ihrer Darstellung, die nicht zwischen natürlichen Zahlen und Bruchzahlen unterschied, ließen sich alle Zahlen in Faktoren ungleich Eins zerlegen.

Das eigenartige System der Zahldarstellung der babylonischen Mathematiker warf jedoch auch spezifische Probleme auf. Zu den ärgerlichsten gehörte wohl die Tatsache, daß sich zwar die Kehrwerte der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 20 in die Reziprokentabelle schreiben ließen, nicht jedoch der Kehrwert der Zahl 7. Im Folgenden wurde es noch ärgerlicher, denn auch die 11, die 13, die 14, etc. besaßen keinen Kehrwert in Form einer endlichen Zahldarstellung ihres Systems. Aus moderner Sicht sind die „guten“ Zahlen der Babylonier genau diejenigen, die nur die Zahlen 2, 3 und 5 als Primfaktoren besaßen, das sind die Primfaktoren der Basis 60. Die Folge war, daß sich die babylonischen Mathematikern zu virtuosen Meistern im Umgang mit solchen „guten Zahlen“ entwickelten und alle anderen vermieden. Einige von ihnen allerdings liebten gerade solche Zahlen und bauten sie in ihre Aufgaben ein, dies aber wohl nur um zu zeigen, was für hervorragende Rechner sie waren, daß sie nicht einmal vor solchen Monstern zurückschreckten.

Eigentümlichkeiten der ägyptischen Mathematik

Auch die Ägypter hatten mit ihren Zahlen ihre liebe Not. Wie wir gesehen haben, fing alles ganz harmlos und ähnlich an wie in Mesopotamien. Aber dann kamen sie auf die Idee ihres so genial einfachen Verfahrens der Multiplikation, wie wir es im Abschnitt 1.2 kennen gelernt haben. Das sollte Folgen haben, die sie in eine ganz andere Richtung führten als die Schreiber Mesopotamiens. Auch die ägyptischen Verwaltungsschreiber hatten das Problem, daß man in der täglichen Praxis mit Bruchteilen zu rechnen hatte, insbesondere mit der Aufteilung in gleiche Teile, in moderner Sicht also mit Kehrwerten der natürlichen Zahlen, mit „Stammbrüchen“. Ihr einfaches System der Multiplikation verführte sie dazu, den Bedeutungsunterschied zwischen den Vielfachen einer Einheit und den Teilen einer Einheit nur durch ein Symbol zum Ausdruck zu bringen, und zu versuchen, mit diesen so gekennzeichneten Zahlen als wären sie selbst nichts anderes als „natürliche Zahlen“ genauso zu multiplizieren und dividieren wie mit den Zahlen, die in unseren Augen die wahren natürlichen Zahlen sind.

Wir kennen diese Form der Zahldarstellung und die auf sie gegründete Rechentechnik vor allem aus dem Papyrus Rhind, der das mathematische Wissen der Ägypter zu Beginn des zweiten Jahrtausends v.Chr. repräsentiert. In 2.1.2 haben wir schon gesehen, das die Vielfachen einer Einheit wie in Mesopotamien durch Zeichenwiederholungen dargestellt wurde, die „7“ also durch siebenfache Wiederholung des Striches, der die Einheit „1“ repräsentierte. Die Teile der Einheit wurden nun in Abrenzung zu den Vielfachen dadurch gekennzeichnet, daß über die Zeichenwiederholung die Hieroglyphe „r“ gesetzt wurde, die in der Schreibschriftform des Hieratischen zu einem Punkt degenerierte. Der siebente Teil wurde also ebenfalls durch die siebenfache Wiederholung des Striches, der die Einheit „1“ repräsentierte, dargestellt, dann jedoch mit dem darübergesetzten Zeichen „r“ als Teilung in sieben Teile spezifiziert, das in moderner Umschrift durch das Überstreichen der Zahl notiert wird, also als „$\overline{7}$“.

Wir überlassen es hier dem nachfolgenden Aufgabenteil (Abschnitt 3, Aufgabe H 15) die Schwierigkeiten ansatzweise kennen zu lernen, auf die die Anwendung der Multiplikation auf solche Zahldarstellung führt. Wiederum ist es die Form der Zahldarstellung, die die Möglichkeiten und Grenzen des Umgangs mit den natürlichen Zahlen bestimmt. Insbesondere ist es ein Problem der ägyptischen „Stammbruchrechnung“, diese Brüche zu addieren. Für uns ist beispielsweise $^1/_7 + ^1/_7 = ^2/_7$. Für den ägyptischen Schreiber aber gab es keine Darstellung für „$^2/_7$“. Für ihn lautete die komplizierte Lösung: $^1/_7 + ^1/_7 = ^1/_4 + ^1/_{28}$, oder: $\overline{7} + \overline{7} = \overline{4}\ \overline{28}$.

Die Aufgaben des Papyrus Rhind sind wahrscheinlich typisch für die Probleme der ägyptischen Mathematik, die sich aus ihrer Form der Zahldarstellung und der darauf gegründeten Rechentechnik ergeben. Da das ägyptische Multiplikationsverfahren auf der fortwährenden Verdoppelung und Halbierung von Zahlen beruht, führt seine Erweiterung auf die Stammbrüche ständig auf das Problem, diese zu verdoppeln und zu halbieren. Nun ist es bei der ägyptischen Zahldarstellung einfach, einen Stammbruch wie 7 zu halbieren, denn man braucht ja nur die zugrundeliegende Zahl zu verdoppeln: die Hälfte von $\overline{7}$ ist $\overline{14}$. Ihn zu verdoppeln jedoch erfordert ein kompliziertes Verfahren der Zerlegung, um zu dem Ergebnis „$\overline{4}\ \overline{28}$“ zu gelangen. Der Papyrus Rhind beginnt daher mit den Berechnungen der Verdoppelungen aller Stammbrüch ungerader Zahlen von $\overline{3}$ bis $\overline{99}$. Es folgt ein bunter Strauß von aus der Praxis der ägyptischen Verwaltungsbeamten abgeleiteten Problemen und den zum Teil virtuosen Lösungen, die die ägyptische Rechentechnik möglich machte.

Die Kalenderzyklen der Maya

Im Abschnitt 1.3 haben wir bereits die Zahlzeichen der Maya und ihr wichtigstes Anwendungsgebiet kennen gelernt, die Berechnung der Zyklen ihrer Kalender. Die Beispiele in diesem Abschnitt konzentrierten sich auf den „religiösen“ Tzolkin-Zyklus mit den 20 Tagesnamen

> Imix, Ik, Akbal, Kan, Chicchan, Cimi, Manik, Lamat, Muluc, Oc,
> Chuen, Eb, Ben, Ix, Men, Cib, Caban, Eznab, Cauac, Ahau

und der parallen Zählung des Dreizehnerzyklus der Tage 1, 2, 3, ..., 13. Das Prinzip dieser doppelten Zählung, das auch vielen weiteren von den Mayas verwendeten Zyklen zugrunde liegt, ist ein ganz anderes als dasjenige, welches uns von den westeuropäisch-christlichen Kalendern vertraute Zählen ist. Bei diesen Kalendern werden nicht gleichzeitig zwei Zyklen, beispielsweise Monate und Jahre, weitergezählt, sondern immer dann, wenn ein Zyklus am Ende angelangt ist, im Beispiel der Monate am Ende des Dezembers, erhöht sich der andere Zyklus um einen Schritt, im gegebenen Beispiel die Jahreszahl.

Auch dieses Prinzip wurde von den Maya verwendet, insbesondere bei dem am Sonnenjahr orientierten Haab-Zyklus, der im Folgenden im Mittelpunkt stehen soll. Das „Jahr“ des Haab bestand aus 18 „Monaten“ von je 20 nummerierten Tagen. Die Monate waren bezeichnet:

> Pop, Uo, Zip, Zotz, Tzec, Xul, Yaxkin, Mol, Chen,
> Yax, Zac, Ceh, Mac, Kankin, Muan, Pax, Kayab, Cumku.

Um dieses Jahr von 360 Tagen mit der tatsächlichen Länge des Sonnenjahrs in Übereinstimmung zu bringen, wurden am Ende des Jahres fünf Extratage angehängt, bezeichnet als „Uayeb“ und gzählt von 1 Uayeb bis 5 Uayeb. Die Tage innerhalb eines Monats wurden, unabhängig von den Tagesnamen des Tzolkin, von „1“ bis „19“ nummeriert, gefolgt von einem zwanzigsten Tag, der entweder als „Ende“ des Monats, häufiger aber als „Sitz“des Folgemonats bezeichnet wurde und daher modern zumeist als Tag „0“ umschrieben wird.

In der Regel wurden bei der Datumsangabe sowohl das Datum des Tzolkin-Zyklus als auch das Datum des Haab-Zyklus angeführt, wobei die Zeichen entsprechender der Schriftrichtung von oben nach unten zweispaltig senkrecht untereinander angeordnet wurden. Nehmen wir als Beispiel die Angabe 6 Ahau 13 Yaxkin (Abbildung 25) auf einer Stele in Quirigua (Stele C, Westseite):

Abbildung 25: Datumsangabe 6 Ahau (Tzolkin) 13 Yaxkin (Haab) auf Stele C in Quirigua

Diese Angabe, bei der die Zahlen 6 und 13 in verzierter Form links senkrecht an der Tages- bzw. Monatsglyphe angeheftet sind, bedeutet, daß der Tag im religiösen Tzolkin-Zyklus der sechste Tag des nummerierten 13-Tage-Zyklus ist und den Tagesnamen Ahau trägt, also den Namen des letztenTages im 20-Tage Zyklus der Tagesnamen. Ferner handelt es sich im weltlicher Haab-Zyklus, wenn man den speziellen Monat „0“ mitzählt, um den 14. Tag des Monats Yaxkin, des 7. Monats des Sonnenjahres. (Siehe Abschnitt 1.3.)

Neben solchen Angaben in einem der zyklischen Kalender gab es auch noch eine ganz andere Form von Datumsangaben, die üblicherweise als „long count“ (lange Zählung) bezeichnet wird. Als Beispiel sei hier eine Stele aus Naranjo (Stele 22) angeführt, auf der sich vor der Angabe 9 Manik 0 Kayab die folgende „long count“-Datumsangabe findet:

9 Baktun 12 Katun 15 Tun 13 Uinal 7 Kin,

modern umschrieben als: 9.12.15.13.7. Üblicherweise wird das System der Maya, Zahlen zu notieren, als ein „vigesimales Stellenwertsystem“ bezeichnet, d.h. als Stellenwertsystem mit der Basis 20, und zwar ein System mit zwei Grundzeichen mit den Werten „1“ und „5“ (siehe Abschnitt 1.3). In der Kalenderrechnung ist dies nur bedingt zutreffend, denn die Notierung ist durch Einfügung einer Stufe mit 18 statt 20 Einheiten den Besonderheiten des Kalenderjahres angepaßt. Den Datumsangaben des „long count“ liegen die folgenden Gleichungen zugrunde:

1 Uinal	=	20 Kin	(	=	20 Tage),
1 Tun	=	18 Uinal	(= $18 \cdot 20$ Tage	=	360 Tage),
1 Katun	=	20 Tun	(= $18 \cdot 20^2$ Tage	=	7200 Tage),
1 Baktun	=	20 Katun	(= $18 \cdot 20^3$ Tage	=	144000 Tage).

Wir können die Angabe 9.12.15.13.7 also als Kurzform für die folgende Zeitspanne interpretieren:

$$(9 \cdot (18 \cdot 20^3) + 12 \cdot (18 \cdot 20^2) + 15 \cdot (18 \cdot 20) + 13 \cdot 20 + 7) \text{ Tage} = 1388067 \text{ Tage.}$$

Solche Angaben des „long count“ stellten fest, welche Zeit seit dem festen Ausgangsdatum 0.0.0.0.0 vergangen war, für das sich aus den parallel notierten Daten 9 Manik 0 Kayab des Tzolkin und des Haab die Daten 4 Ahau 8 Cumku zurückrechnen lassen. Dieses mythische

Ausgangsdatum 0.0.0.0.0, 4 Ahau 8 Cumku - der Beginn der Zeitrechnung der Maya - lag demnach für die als Beislpiel angeführte Stele bereits 1388067 Tage zurück, das sind etwa 3800 Jahre. Da die klassische Periode der Mayas archäologisch in die Zeit zwischen 300 und 900 n.Chr. zu datieren ist, fällt der Beginn des „long count“ also in die Zeit um 3000 v.Chr., lange bevor die Mayakultur überhaupt existierte.

Das genaue Datum dieses Nullpunkts des Mayakalenders in unserer Gregorianischen Zeitrechnung ist nicht mit Sicherheit zu bestimmen. Astronischen Daten der Maya, Informationen aus der Zeit der spanischen Eroberung sowie die bis in die Gegenwart fortgeführten Kalender der Einheimischen Mittelamerikas liefern jedoch Hinweise, die den Zeitpunkt stark eingrenzen. Als wahrscheinlichstes Datum für den mythologischen Beginn des „long count“ der Maya wird heute der 13. August 3114 v.Chr. angesehen.

Die folgende Datumsangabe auf einer Stele von Quiriguá (Monument 5, Stele E) bietet ein weiteres Beispiel für die parallele Verwendung der verschiedenen Kalender der Maya. Die Datumsangabe lautet:

9.17.0.0.0; 13 Ahau 18 Cumku.

Dieser Angabe zufolge waren zum Zeitpunkt, auf den sich die Stele bezieht, seit Beginn der Zeitrechnung der Maya $(9 \cdot 144000 + 17 \cdot 7200)$ Tage = 1418400 Tage (Kin) vergangen, und man schrieb das Datum: 13 Ahau 18 Cumku. Die Stele enthält übrigens auch die Angabe, daß an diesem Tag Neumond war, eine Angabe, die dadurch Bestätigung findet, daß das gleiche Datum auch in einer Tabelle des Dresdner Kodex enthalten ist, in der Sonnenfinsternisse aufgelistet werden, die bekanntlich nur bei Neumond stattfinden können. Unter der Annahme, daß der 13. August 3114 v.Chr. das präzise Gregorianische Datum des Beginns der Zeitrechnung der Maya darstellt, ist die Stele auf den 24. Januar 771 n.Chr. zu datieren. Zu diesem Zeitpunkt fand in der Tat in Nordamerika mittags um 13 Uhr eine totale oder nahezu totale Sonnenfinsternis statt, die auch auf der Halbinsel Yucatan noch beträchtliche Teile der Sonne bedeckte.

Als letztes Beispiel für die Kalenderrechnung der Maya soll abschließend die Datumsangabe der sogenannten Leidener Platte vollständig nachgerechnet werden. Die Leidener Platte ist ein Anhänger aus Jade, der im Rijksmuseum voor Volkenkunde in Leiden (Niederlande) aufbewahrt wird (siehe die Abbildung bei G. Ifrah, 1986, S. 465). Die Rückseite des Anhängers enthält eine der ältesten überlieferten Datumsangaben der Maya, nämlich das „long count“-Datum 8 Baktun, 14 Katun, 3 Tun, 1 Unial, 12 Kin, oder kurz: 8.14.3.1.12. Für den Tzolkin- und den Haab-Zyklus enthält der Anhänger ferner die Angabe 1 Eb 0 Yaxkin.

Die Umrechnung des „long count“ ergibt:

8	mal	144000	=	1152000
14	mal	7200	=	100800
3	mal	360	=	1080
1	mal	20	=	20
12	mal	1	=	12
				1253912 Tage

Seit Beginn der Zeitrechnung der Maya waren also 1253912 Tage vergangen. Der Beginn dieser Zeitrechnung hatte das Datum: 4 Ahau 8 Cumku. Ergibt sich daraus tatsächlich für den Tzolkin-Zyklus und für den Haab-Zyklus das Datum 1 Eb und 0 Yaxkin der Leidener Platte?

Die Aufgabe H 16 (1) des anschließenden Aufgabenteils wird zeigen: Eine bestimmte Datumskombination von Tzolkin und Haab wie beispielsweise die Kombination des Beginns der Maya Zeitrechnung 4 Ahau 8 Cumku wiederholt sich nach der sogenannten Kalenderrunde, die 52 Haab-Zyklen (Sonnenjahr) oder 73 Tzolkin-Zyklen (Jahre nach dem religiösen Kalender) entspricht, also 18980 Tagen. Wegen der Gleichung

$$1253912 = 66 \cdot 18980 + 1232$$

muß man in beiden Kalendern nur von 4 Ahau bzw. 8 Cumku 1232 Tage weiterrechnen, um die Angaben für die Leidener Platte zu finden (Warum?).

Wir rechnen zunächst, beginnend mit 4 Ahau, die Datumsangabe des Tzolkin nach. Aus der Gleichung

$$1232 = 61 \cdot 20 + 12$$

folgt, daß wir vom Tag Ahau in der Abfolge der 20 Tagesnamen 12 Tage weiterschreiten müssen. Wir erhalten den Tag Eb. Aus der Gleichung

$$1232 = 94 \cdot 13 + 10$$

folgt, daß wir vom Tag 4 im Dreizehner-Zyklus 10 Tage weiterschreiten müssen. Wir erhalten den Tag 1. Insgesamt erhalten wir damit tatsächlich für den Tzolkin-Zyklus das auf der Stele angegebene Datum 1 Eb.

Wir rechnen nun auf gleiche Weise, beginnend mit 8 Cumku, die Datumsangabe des Haab-Zyklus nach. Aus der Gleichung

$$1232 = 3 \cdot 365 + 6 \cdot 20 + 17$$

folgt, daß wir 6 Monate und 17 Tage weiterschreiten müssen, abzüglich der 5 Tage des Uayeb am Jahresende, das wir dabei überschreiten. Die 6 Monate bringen uns zum Monat Xul, wegen der eingeschobenen Tage des Uayeb jedoch nur bis zum Tag 3 Xul. Das Hinzuzählen der verbleibenden 17 Tage bringt uns an den Beginn des nächsten Monats und wir erhalten so tatsächlich: 0 Yaxkin.

Rechnen wir nun, beginnend mit dem 13. August 3114 v.Chr., das Datum noch in unseren Gregorianischen Kalender um, der auf dem astronomischen Jahr mit 365,2425 Tagen beruht. Aus der Gleichung

$$1253912 = 3433 \cdot 365{,}2425 + 34{,}49...$$

folgt, daß wir zum Ausgangsjahr 3114 v.Chr zunächst 3433 Jahre hinzuzählen müssen. Die Differenz von 3114 und 3433 ist 319, aber da in der historischen Zählung der Jahre im Gegensatz zur astronomischen das Jahr Null ausgelassen wird und die Zeitrechnung direkt vom Jahr 1 v.Chr. in das Jahr 1 n.Chr. übergeht, erreichen wir dabei nicht den 13. August 319 n.Chr. sondern ein Jahr später, nämlich den 13. August 320 n.Chr. Zum diesem Datum müssen wir jetzt noch 34,49... Tage hinzuziehen, wobei die Bruchteile die auf das Jahr umgelegten Schalttage repräsentieren.

Da das Jahr 3114 v. Chr. nur zwei Jahre vor einem Schaltjahr liegt und das Jahr 320 n.Chr. sogar selbst ein Schaltjahr ist, hinkt der errechnete Durchschnittswert hinter den tatsächlichen Schalttagen hinterher. Wir dürfen daher nicht den abgerundeten Wert 34 Tage verwenden, sondern müssen den aufgerundeten Wert 35 Tage zum Datum 13. August 320 n.Chr. addieren. Wir erhalten damit für das auf der Leidener Platte verzeichnete Datum 8.14.3.1.12 der Maya in unserem Gregorianischen Kalender das Datum: 17. September 320 n.Chr., das ist ein Datum zu Beginn der klassischen Periode.

2.4 Die Geburt der deduktiven Arithmetik

Der folgende Abschnitt soll einen Einblick in die Entstehung der beweisenden Mathematik in Griechenland vermitteln. Die griechische Mathematik der Periode von Thales von Milet (lebte im 6. Jhd.v. Chr.) bis Euklid (um 300 v. Chr.) bildete einen qualitativen Neuanfang, der sie für zwei Jahrtausende zum Leitbild von Mathematik überhaupt machte. Abschnitt 1.4 hatte bereits die „Theoreme" einer der ältesten beweisenden mathematischen Theorien zum Gegenstand, nämlich die Theoreme der von den Pythagoreern im 5. Jahrhunderts v. Chr. entwickelte Lehre vom Geraden und Ungeraden. Wir kennen diese frühe mathematische Theorie jedoch nicht in ihrer ursprünglichen Form, sondern nur so, wie sie Euklid über einhundert Jahre später in seine *Elemente* eingefügt hat. Mathematische Detektivarbeit und historischer Spürsinn sind erforderlich, die einzelnen Theoriestücke der Lehre in den *Elementen* zusammen zu suchen und auf ihre Herkunft zurückzuschließen.

Die wichtigsten Theoreme, die zu der Lehre gehörten, lassen sind relativ leicht identifizieren, denn sie bilden in den *Elementen* des Euklid einen geschlossenen Block. Euklid hat diesen Block im dritten der drei grundlegenden arithmetischen Bücher VII bis IX eingefügt, und zwar am Ende vor den beiden letzten Theoremen. Die Sätze der Lehre fallen wegen ihrer Einfachheit und wegen ihrer gemeinsamen Thematik sofort ins Auge, denn die übrigen Theoreme des Buches IX sind mathematisch viel komplexer und behandeln auch viel allgemeinere Eigenschaften von Zahlen als die des Geraden und Ungeraden.

Die zu der Lehre gehörigen Definitionen hat Euklid bei den Definitionen der arithmetischen Bücher am Anfang von Buch VII untergebracht. Hier läßt sich nur auf Grund des Inhalts der Definitionen vermuten, welche von ihnen ursprünglich zur Lehre vom Geraden und Ungeraden gehörten. Mit Sicherheit gehörten zu der Lehre jedoch die Definitionen VII, Def. 6 bis 10:

(Def.6) Gerade ist die Zahl, die sich halbieren läßt;
(Def.7) und ungerade die, die sich nicht halbieren läßt, oder die sich um eine Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet.
(Def.8) Grademal gerade ist die Zahl, die sich von einer geraden Zahl nach einer geraden Zahl messen läßt;
(Def.9) gerademal ungerade ist die, die sich von einer geraden Zahl nach einer ungeraden Zahl messen läßt;
(Def.10) ungerademal ungerade ist die Zahl, die sich von einer ungeraden Zahl nach einer ungeraden Zahl messen läßt.

Die Definitionen VII, Def. 1 und VII, Def. 2, die den Begriff der Zahl zum Gegenstand haben, und die Definitionen VII, Def. 3 bis 5 und 15, die das Teilen und das Vervielfältigen von Zahlen zum Gegenstand haben, sind allgemeinerer Natur, aber ebenfalls wahrscheinlich sehr alt. Auch sie werden jedenfalls in der Lehre offensichtlich vorausgesetzt:

(Def.1) Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.
(Def.2) Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.
(Def.3) Teil einer Zahl ist eine Zahl, die kleinere von der größeren, wenn sie die größere genau mißt;
(Def.4) und Menge von Teilen, wenn sie sie nicht genau mißt;
(Def.5) und Vielfaches die größere von der kleineren, wenn sie von der kleineren genau gemessen wird.
(Def.15) Man sagt, daß eine Zahl eine Zahl vervielfältige, wenn die zu vervielfältigende so oft zusammengesetzt wird, wie viele Einheiten jene enthält, und so eine Zahl entsteht.

Diese Gruppe von Definitionen macht grundlegende Charakteristika des Zahlverständnisses der griechischen Philosophen und Mathematiker deutlich:

- Zahlen (griechisch: *ἀριθμός*) sind „Zusammensetzungen“ von „Einheiten“ und damit grundsätzlich natürliche Zahlen, wie wir heute sagen würden.
- Einheiten (griechisch: *μονάς*) können mehrfach auftreten, aber es gilt, daß „jede ganz jeder gleich und nicht im mindesten verschieden“ ist (Platon, Politeia, 525 d); und sie sind jeweils unteilbar.
- Zahlen unterscheiden sich insofern grundlegend von anschaulichen Gegebenheiten als man sie „nur denken kann, unmöglich aber auf irgendeine andere Art handhaben“ (Platon, Politeia, 526a).
- Zahlen unterscheiden sich aber auch von den Ideen der platonischen Philosophie, denn sie sind als „mathematische Dinge“ zwischen dem Sinnlichen und den Ideen anzusiedeln; vom Sinnlichen unterscheiden sie sich durch „ihre Ewigkeit und Unbeweglichkeit“, von den Ideen dadurch, „daß es der mathmatischen Dinge viele gleichartige gibt, während jede Idee nur eine, sie selbst, ist“ (Aristoteles, Metaphysik, 987 b).

Die letzte der Definitionen der Gruppe könnte jedoch auch zu einer anderen Gruppe von Definitionen einer historisch späteren Zeit gehören, nämlich zu denen der Lehre von den Primzahlen und den zusammengesetzten Zahlen mit dem zentralen Theorem, daß die Anzahl der Primzahlen unendlich ist. Zur Gruppe der Definitionen, die die Primzahlen betreffen, gehörenden ansonsten noch die Definitionen VII, Def. 11 bis 14:

(Def.11) Primzahl ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen läßt;
(Def.12) gegeneinander prim sind Zahlen, die sich nur durch die Einheit als gemeinsames Maß messen lassen;
(Def.13) zusammengesetzt ist eine Zahl, die sich durch irgendeine (andere) Zahl messen läßt;
(Def.14) gegeneinander zusammengesetzt sind Zahlen, die sich durch irgendeine Zahl als gemeinsames Maß messen lassen.

Die so definierten Begriffe werden zwar teilweise auch in der Lehre vom Geraden und Ungeraden verwendet, aber dies könnte auf eine sprachliche Vereinheitlichung durch Euklid zurückzuführen sein. Spuren einer solchen Überarbeitung werden auch in den Beweisen deutlich. Während im Allgemeinen in den Beweisen der Sätze der Lehre vom Geraden und Ungeraden nur auf die Definitionen und Sätze dieser Lehre zurückgegriffen wird, macht der Beweis des Satzes IX, 32 von einem allgemeineren Satz Gebrauch (IX, 13), der nicht zur Lehre gehört. Dies ist ersichtlich eine Veränderung der Beweisstruktur durch Euklid im Rahmen seiner Anordnung der Theoreme, denn der Satz läßt sich auch mit den Theoremen der Lehre allein beweisen (siehe Becker 1934, S. 535f.).

In jedem Fall jedoch sind die Beweise der Lehre vom Geraden und Ungeraden, die uns Euklid überliefert hat, jüngeren Datums als die bewiesenen Sätze selbst. Euklid vermeidet bei der Formulierung der Sätze jeden Hinweis auf ihre Herkunft aus dem Operieren mit Rechensteinen, auf die uns nur andere Quellen aufmerksam machen. Dabei ist gerade bei den ersten Sätzen der Lehre (siehe Abschnitt 1.4) offensichtlich, daß sie sich mit Hilfe figurierter Zahlen, das heißt durch geometrische Anordnungen von Rechensteinen, sehr viel einfacher begründen lassen als mit der uns durch Euklid überlieferten Beweistechnik. Mit Hilfe der Operationen mit Rechensteinen, wie sie in Abbildung 26 angedeutet sind, läßt sich beispielsweise ohne Schwierigkeit begründen, daß die Summe gerader Zahlen immer gerade sein muß (Aussage IX, 21) und ebenfalls daß die Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen immer gerade sein muß.

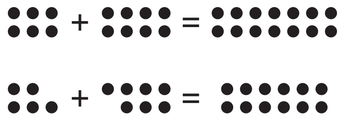


Abbildung 26: Mit Rechensteinen figurierte Zahlen als Grundlage für das Auffinden und als Hilfsmittel für die Begründung der Aussagen, daß die Summe gerader Zahlen und die Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen gerade sein muß (Euklid, Elemente IX, 21 und 22)

Vergleichen wir diese Form der Begründung durch das Operieren mit figurierten Zahlen mit der Form der Beweise, die Euklid überliefert und nehmen wir als Beispiel den Beweis des zweiten der beiden Sätze (Aussage IX, 22) aus dem ersten (Aussage IX, 21). Der Beweis hat wie alle Beweise bei Euklid eine bestimmte sprachliche Form (Bezeichnung der Variablen hier vereinfacht). Zunächst wird die Aussage in Form einer Wenn-dann-Aussage allgemein formuliert:

> Setzt man beliebig viele ungerade Zahlen zusammen und ist die Anzahl gerade, so muß die Summe gerade sein.

Als nächstes werden die Bedingungen als gegeben angenommen:

> Beliebig viele ungerade Zahlen in gerader Anzahl a, b, c, d seien zusammengesetzt.

Dann wird die Behauptung formuliert:

> Ich behaupte, daß die Summe e gerade ist.

Schließlich folgt der eigentliche Beweis:

> Da nämlich jede der Zahlen a, b, c, d ungerade ist, muß, wenn man von jeder die Einheit wegnimmt, jeder der Reste gerade sein (VII, Def. 7), so daß auch deren Summe gerade sein muß (IX, 21). Auch die Zahl der Einheiten ist aber gerade.

Der Beweis endet mit der Wiederholung der nun bewiesenen Behauptung und der stereotypen Schlußformel, „was zu beweisen war“, die in den gedruckten Ausgaben zumeist durch die Abkürzung der lateinischen Übersetzung „quod erat demonstrandum“ wiedergegeben wird:

> Also ist auch die Summe e gerade (IX, 21) - q. e. d.

Zwischen dieser griechischen Beweistechnik, die Euklid verwendet, und Begründungen mit Hilfe von figurierten Zahlen der Rechenstein-Arithmetik besteht ein grundsätzlicher Unterschied. Begründungen der Rechenstein-Arithmetik beziehen sich direkt auf die Operationen mit den Rechensteinen, die Beweistechnik dagegen auf die schriftliche Fixierung von Aussagen über Voraussetzungen und Ergebnisse solcher Operationen. Diese Beweistechnik operiert nicht mit Objekten, sondern mit Sprachformen von Aussagen über Objekte. Im Vergleich zur Begründung der Aussage IX, 22 mit Hilfe von figurierten Zahlen der Rechenstein-Arithmetik wirkt die Beweistechnik des Euklid schwerfällig und eher den Sachverhalt verdunkelnd als erhellend. Aber die Leistungsfähigkeit dieser Technik ist weitaus größer, denn in ihr kann man auch mit hypothetischen, sogar mit mathematisch falschen Aussagen operieren und damit „indirekte Beweise“ führen. Dies soll abschließend das folgende Beispiel zeigen.

Aristoteles führt bei der Erläuterung der Technik des indirekten Beweises einen Beweis als Beispiel an, der von der Lehre vom Geraden und Ungeraden Gebrauch macht. Dieser Beweis war offensichtlich zu Lebzeiten von Aristoteles und damit eine Generation vor Euklid schon so bekannt, daß Aristoteles ihn als Beispiel verwenden konnte, ohne ihn selbst wiedergeben zu müssen:

> Immer, wenn man etwas durch die Unmöglickeit erhärtet, schließt man zwar auf Falsches, weist aber damit das, was ursprünglich zur Erörterung steht, aus der Voraussetzung nach, wenn bei Annahme seines kontradiktorischen Gegenteils etwas Unmögliches folgt. So zeigt man z. B. die Inkommensurabilität der Diagonale daraus, daß bei Annahme ihrer Kommensurabilität ungrade Zahlen graden gleich werden. Daß also Ungrades Gradem gleich wird, wird geschlossen, daß aber die Diagonale und die Seite sich nicht durch *ein* Maß messen lassen, zeigt man aus der Voraussetzung, weil wegen der Annahme des Gegenteils etwas Falsches eintritt. Denn darunter, daß man durch das Unmögliche schließt, verstanden wir eben dieses, daß man aus der ursprünglichen Voraussetzung eine unmögliche Folge ableitet. (Aristoteles, An. Prior. I, 41a)

Diese Beschreibung macht es leicht, den Beweis, von dem Aristoteles spricht, in den *Elementen* des Euklid zu identifizieren. Es handelt sich um den möglicherweise erst später dem Euklidtext hinzugefügten Satz X, 117 am Ende des zehnten Buches:

> Man soll zeigen, daß in jedem Quadrat die Diagonale der Seite linear inkommensurabel ist.

Die Definition des Begriffs „inkommensurabel“ findet sich zu Beginn des Buches (X, Def. 1):

> Kommensurabel heißen Größen, die von demselben Maß gemessen werden, und inkommensurabel solche, für die es kein gemeinsames Maß gibt.

Die Entdeckung der Existenz inkommensurabler Größen, also von Größen, die - modern ausgedrückt - nicht in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen und somit nur durch „irrationale“ Zahlen darstellbar sind, ist eine der wichtigsten Entdeckungen der griechischen Mathematiker. Manche Historiker der Mathematik interpretieren die Auswirkungen dieser Entdeckung sogar als eine Grundlagenkrise. In jedem Fall hat diese Entdeckung der Entwicklung der Mathematik entscheidende Anstöße vermittelt. Es erscheint auf den ersten Blick kaum glaubhaft, daß eine so tiefe Einsicht in die Natur der Zahlen auf der Grundlage der scheinbar so einfachen Lehre vom Geraden und Ungeraden möglich gewesen sein soll.

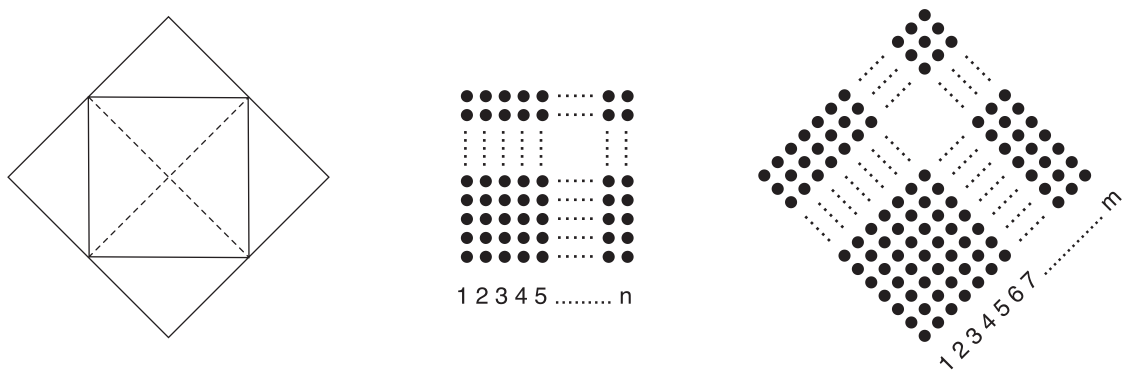


Abbildung 27: Das Quadrat über der Diagonalen eines Quadrats hat die doppelte Fläche des Quadrats selbst. Wenn die Seiten kommensurabel wären, dann müßte es auch figurierte Zahlen mit dieser Eigenschaft geben. Gibt es aber nicht!

Wir geben hier nicht den Wortlaut des Beweises in Euklids *Elementen* wieder, sondern skizzieren nur die Grundidee in ihrer Beziehung zur Lehre vom Geraden und Ungeraden. Eine einfache Zeichnung zeigt, daß das Quadrat über der Diagonalen eines Quadrats die doppelte Fläche des Quadrats selbst besitzt. Nun folgt der indirekte Beweis: Wir nehmen an, die Seite des Quadrats und dessen Diagonale hätten doch ein gemeinsames Maß, so daß sich die Seite des Quadrats als das n-fache und die Diagonale als das m-fache dieses Maßes ausdrücken lassen (siehe Abbildung 27).

Wir können uns nun vorstellen, wir stellten die beiden Quadrate durch quadratisch angeordnete Rechensteine dar mit n beziehungsweise m Steinen an den Seiten. Das große Quadrat mit m Steinen Seitenlänge müßte dann genau doppelt so viele Steine enthalten wie das kleine Quadrat mit n Steinen Seitenlänge. Natürlich könnten wir solche Quadrate nicht wirklich legen. Soviel wir auch probieren würden, wir könnten solche Quadrate nicht finden. Das ist ja gerade das Besondere des indirekten Beweises: Wir nehmen etwas Unmögliches an und zeigen dann, daß es wirklich unmöglich ist, weil die Annahme auf einen Widerspruch führt.

Wir nehmen also nur hypothetisch an, solche Quadrate würden existieren, und untersuchen nun mit Hilfe der Lehre vom Geraden und Ungeraden die beiden natürlichen Zahlen n und m, die ihre Seiten bilden würden. Je größer das gewählte gemeinsame Maß wäre, desto kleiner wären diese Zahlen. Nehmen wir das größte gemeinsame Maß, das sich finden läßt, erhalten wir die kleinsten möglichen Zahlen n und m. Diese können dann nicht beide gleichzeitig gerade sein, denn sonst wäre auch das doppelte des gemeinsamen Maße ein gemeinsames Maß und das gewählte Maß also nicht das größtmögliche. Die größere Zahl m muß aber gerade sein, denn wir wissen ja, daß ihr Quadrat gerade ist, denn es ist doppelt so groß wie das Quadrat mit n Steinen Seitenlänge; wenn aber das Quadrat einer Zahl gerade ist, dann muß die Zahl selbst auch gerade sein. Wir wissen jetzt also, daß die Zahl m gerade und die Zahl n ungerade sein muß.

Wenn aber m gerade ist, können wir das Quadrat mit der Seitenlänge m in vier gleichgroße Quadrate mit der Seitenlänge $^{m}/_{2}$ zerlegen. Jetzt hat plötzlich das kleinere Quadrat mit der Seitenlänge n die magische Eigenschaft, doppelt so viele Steine zu enthalten wie das kleinere Quadrat mit der Seitenlänge $^{m}/_{2}$. Das Quadrat von n ist dann eine gerade Zahl und damit auch die Zahl n selbst. Dies aber ist ein Widerspruch dazu, daß wir eben festgestellt haben, daß die Zahl n ungerade sein muß.

Der einzige mögliche Schluß aus der Untersuchung der Zahlen n und m mit Hilfe der Lehre vom Geraden und Ungeraden ist also: Solche Quadrate kann es nicht geben! Dies ist übrigens auch der Grund, warum die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrats nicht mehr mit Hilfe der ursprünglichen Rechenstein-Arithmetik begründet werden kann, sondern nur mit einer Repräsentation des Umgangs mit den Rechsteinen höherer Ordnung (siehe Abschnitt 2.1). Eine solche Repräsentation wurde mit der Beweistechnik geschaffen, die in den *Elementen* des Euklids die Grundlage für die Darstellung der Lehre vom Geraden und Ungeraden bildet. Erst das Operieren mit Sprachformen, wie es den Beweisen der griechischen Mathematik eigen ist, ermöglicht auch den Umgang mit der hypothetischen Annahme unmöglicher Anordnungen der Rechensteine, um deren Unmöglichkeit offenbar werden zu lassen.

2.5 Die neue Kunst der Rechenmeister

Einen ganz ähnlicher Prozeß ist mit dem Übergang vom Rechnen mit dem Abakus zum schriftlichen Rechnen der Abacisten zu beobachten. Vergegenwärtigen wir uns diese Veränderung der Rechentechnik vor dem Hintergrund der Annahmen über die Entwicklung des logisch-mathematischen Denkens und der Rolle von Repräsentationen erster und höherer Ordnung in diesem Prozeß im Abschnitt 2.1., so wird deutlich, daß auch in diesem Fall die Rückwirkung der Reflexion, des Nachdenkens über die eigenen Handlungen, zum Ausgangspunkt für den Übergang zu leistungsfähigeren Formen des arithmetischen Denkens wurde.

Die Zahldarstellungen des Abakus weist noch eine enge Bindung der Rechenpfennige an die sinnlich-anschaulichen Gegebenheiten der durch sie repräsentierten Objekte auf, insbesondere wegen der natürlichen Zahlen durch eine kardinale Zuordnung zu den Rechenpfennigen. Die Addition auf dem Abakus beispielsweise besteht im Prinzip noch aus denselben Vereinigungshandlungen wie diejenigen, die mit den repräsentierten Objekten selbst ausgeführt werden. Die Stellenordnung und das Bereinigen der Stellenzuordnung der Rechenergebnisse setzen allerdings bereits Repräsentationen höherer Ordnung voraus, was bei der - hier nicht besprochenen - Multiplikation und Division noch deutlicher hervortritt. Solche Repräsentationen höherer Ordnung beruhen nicht mehr auf Zuordnungen von realen Handlungen zu den Operationen mit den Symbolen primärer Repräsentationen, sondern von bereits mental konstruierten Objekten und Operationen und diesen Repräsentationen. Die Einführung der indisch-arabischen Ziffern kann als eine viel weitergehendere Veränderung dieser Art verstanden werden, denn anders als beispielsweise die römischen Ziffern sind die indisch-arabischen Ziffern Namen für Zahlen und nicht mehr Symbole für die gezählten Zähleinheiten oder Objekte.

Dieses uns heute geläufige dezimale Ziffernsystem ist ursprünglich in Indien entstanden. Spätestens seit der Zeit um 600 n. Chr. sind diese indischen Ziffern als Individualzeichen für die Zahlen von Eins bis Neun belegbar. Das Zeichen für die Null ist etwas jüngeren Datums; seine Verwendung ist erst im 8. Jahrhundert historisch belegt. In diesem Jahrhundert haben die Araber bereits das vollständige dezimale Stellenwertsystem übernommen. Nach Europa ist dieses System vermutlich über die iberische Halbinsel gelangt. So ist bekannt, daß gegen Ende des des 10. Jahrhunderts n. Chr. Gerbert von Aurillac (etwa 945 bis 1003 n. Chr.) Rechensteine mit indisch-arabischen Ziffern (apices genannt) beim Abakusrechnen benutzte; naturgemäß gab es allerdings keine Rechensteine mit der Null, denn während man bei der Ziffernschreibung von Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem eine unbesetzte Stelle durch die Null kennzeichnen muß, bleibt auf dem Abakus diese Stelle einfach leer.

Für die weitere Verbreitung des indisch-arabischen Ziffernsystem und die Entwicklung des algorithmischen Rechnens in Europa sorgten vor allem die Kaufleute. So wurden diese Ziffern zunächst insbesondere in Oberitalien, später auch in Süddeutschland verwendet, und es begann im 12. Jahrhundert die in Abschnitt 1.5 erwähnte Auseinandersetzung zwischen den „Abacisten“ und „Algoristen“ oder „Algorithmikern“. Der Widerstand gegen die Ziffern hatte viele Gründe. Es kam anfänglich sogar zu Verboten des Gebrauch der indisch-arabischen Ziffern, beispielsweise 1299 in Florenz wegen der Gefahr von Fälschungen, etwa durch nachträgliches Anhängen einer Null an eine geschriebene Zahl. Trotz solcher Widerstände setzte sich jedoch in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts in den Handelsbüchern der Gebrauch des neuen Ziffernsystems zunehmend durch. Von dieser Zeit an waren vermehrt Rechenmeister tätig, die insbesondere den Söhnen der überregional agierenden Kaufleute gegen Entgelt Rechenunterricht erteilten. Mit dem Aufkommen des Buchdrucks mit beweglichen Lettern etwa ab 1450 tat sich ein weiterer Bereich auf, in dem sich der Gebrauch der Ziffern des dezimalen Stellenwertsystems und das algorithmische Rechnen als vorteilhaft erwies. Die Rechenmeister wurden nun auch zu Autoren von Rechenbüchern, von denen um 1500 schon eine beträchtliche Anzahl existierte. So gelangte der Gebrauch des dezimalen Stellenwertsystems und des algorithmischen Rechnens schließlich im Verlaufe des 16. Jahrhunderts endgültig zum Durchbruch.

Die „anschauliche Gebundenheit“ der Zahldarstellungen des Abakus hatten die dezimalen Zifferndarstellungen offensichtlich nicht mehr. Man mußte nunmehr wissen, wie man beim Rechnen mit diesen Darstellungen umzugehen hat. Der Gebrauch der Rechenbücher hatte zudem zur Voraussetzung, daß man lesen konnte. Das Abakusrechnen dagegen konnte man noch erlernen, ohne des Lesens und Schreibens mächtig sein zu müssen. Für die Rechenmeister war die Auseinandersetzung zwischen „Abacisten“ und „Algoristen“ dennoch klar zu Gunsten der letzteren entschieden, denn für sie überwogen auf längere Sicht die Vorteile des neuen Systems. Und es ist das Verdienst dieser Rechenmeister, von denen im deutschen Sprachraum insbesondere Adam Ries mit seinem zweiten Rechenbuch (1522, siehe Abschnitt 1.5), einem „gemeyn leycht büchlein ... für iunge anhebende schuler“, großen Einfluß gewann, daß das Rechnen „auff der federn“ in allen Bildungsschichten des Volkes verbreitet wurde.

3. Aufgaben (Vertiefung der Lektüre des Kapitels 2. sowie der Bearbeitungen der Aufgaben H 1 bis H 10):

Aufgabe H 11: [Bezüge: 1.1, 2.1]

In Neuguinea gibt es Völker, die selbst heute noch von äußeren Einflüssen anderer Kulturen nahezu unberührt geblieben sind. In Form sogenannter „Körperzahlen“ haben die meisten von ihnen unbeeinflußt von europäischen Traditionen eine eigentümliche Technik des Zählens entwickelt: Nicht Zahlwörter, sondern gewisse Punkte des menschlichen Körpers werden in fester Abfolge für das Zählen verwendet, wobei die benutzten sprachlichen Bezeichnungen beim Zählen genau dieselben sind wie die Bezeichnungen für die jeweiligen Körperteile.

Abbildung 28: Körperzahlen „10“, „13“ und „15“ der Eipo im zentrales Hochland von Neuguinea (nach Koch 1984)

Bei den Eipo beispielsweise, einer Kultur in der tropischen Hochgebirgsregion im Westteil der Insel, beginnt der Zählprozeß beim linken kleinen Finger, der die Eins repräsentiert, führt über die anderen Finger der linken Hand weiter über Punkte des linken Arms bis zum Scheitel und von dort in symmetrischer Entsprechung über die rechte Körperhälfte wieder hinunter bis schließlich zum rechten kleinen Finger, der die 25 repräsentiert:

1 =	ton	kleiner Finger der linken Hand	14 =	odigin	Ohrläppchen rechts
2 =	betinye	Ringfinger der linken Hand	15 =	koklomdigin	Halsschlagader rechts
3 =	winilye	Mittelfinger der linken Hand	16 =	takubdigin	Schulter rechts
4 =	dumbarye	Zeigefinger der linken Hand	17 =	toubnedigin	Oberarmmitte rechts
5 =	fangobarye	Knöchel der linken Hand	18 =	findigin	Armbeuge rechts
6 =	nakobarye	Knöchel der linken Hand	19 =	tekdigin	Unterarmmitte rechts
7 =	tekbarye	Unterarmmitte links	20 =	nakubdigin	Knöchel der rechten Hand
8 =	finbarye	Armbeuge links	21 =	famdigin	Daumen der rechten Hand
9 =	toubnebarye	Oberarmmitte links	22 =	dumdigin	Zeigefinger der rechten Hand
10 =	takobarye	Schulter links	23 =	winilyaba	Mittelfinger der rechten Hand
11 =	koklombarye	Halsschlagader links	24 =	betinyaba	Ringfinger der rechten Hand
12 =	obarye	Ohrläppchen links	25 =	seselekyaba	kleiner Finger der rechten Hand
13 =	mekbarye	Kalottenmitte			

Es ist bei den Eipo selten erforderlich, mit größeren Zahlen umzugehen. Hat man jedoch tatsächlich einmal die Zählfolge bis 25 durchlaufen, so kann notfalls eine nächste Zählrunde von vorn beginnen. Die Bezeichnung „yupe ton“, „einmal gezählt“, markiert die erste Zählrunde als abgeschlossen, entsprechend „betinye ton“ die zweite Zählrunde, u.s.w. Vergleichbare „Körperzahlen“ findet man in etwas unterschiedlichen Ausprägungen bei vielen Kulturen Neuguineas. Die östlich der Eipo lebenden Oksapmin beispielsweise fangen beim rechten Daumen an und gelangen, beide Augen mit einschließend sowie die Nase statt des Scheitels benutzend, bei einer Zählrunde bis zur Zahl 27 beim linken kleinen Finger. Würde man auf irgendeine Weise, beipielsweise durch Zählsteine, die Zählrunden festhalten, dann hätte man eine Zähltechnik, welche bedarfsweise beliebig erweitert werden könnte. Wir können diese Zählweise als ein Modell betrachten, wie endliche Zählreihen zu potentiell unendlichen Zählreihen und in der Folge zu einem abstrakten Begriff der natürlichen Zahl ausgeweitet werden können.

Solche Ausweitung hat jedoch bei den Völker Neuguineas nicht stattgefunden. Auch wenn sie, im Gegensatz etwa zu den in Abschnitt 1.1 angeführten Ureinwohnern Australiens, leistungsfähige Zählsysteme entwickelt haben, gehört in ihrer traditionellen Umwelt das Zählen nicht zu den alltäglichen Tätigkeiten. Es gibt in diesen Kulturen auch keine ausgebildete Rechentechniken für die Addition und Subtraktion und schon gar nicht für die Multiplikation und die Division. Selbst in Situationen, in denen ein Zusammenwirken vieler Menschen vonnöten ist, z.B. beim Bau eines Männerhauses, und in denen wir gewohnt sind, quantitative Angaben, z.B. die Anzahl der heranzuschaffenden Baumstämme oder die Längen derselben, mittels Zahlen (als Maßzahlen) festzulegen, wurde in diesen Kulturen weder gezählt noch gerechnet.

Dies änderte sich erst mit dem Eindringen der westlichen Kultur, insbesondere mit der Einführung von Geld als Zahlungsmittel. Zurückgekehrte Saisonarbeiter von Teeplantagen eröffneten beispielsweise kleine Geschäfte, in denen die Eingeborenen Geld erwerben und wieder ausgeben konnten. Dies führte dazu, wie eine empirische Untersuchung gezeigt hat (Saxe 1982a, 1982b), daß auf der Grundlage der traditionellen Zähltechniken dieser Kulturen neue Rechentechniken erfunden wurden, um die einfachen Aufgaben des Kleinhandels zu meistern.

Nach dieser Vorbereitung nun zu Ihrer Aufgabe. In der erwähnten Untersuchung wurden die Eingeborenen, die an der Studie teilnahmen, mit Aufgaben wie beispielsweise die folgenden Additions- wie Subtraktionsaufgaben konfrontiert, wobei sie zum Teil reale Münzen zu Hilfe nehmen konnten:

(1a)	6 + 7	(1b)	6 + 8	(2a)	9 + 13	(2b)	9 + 12
(3a)	16 - 7	(3b)	16 - 8	(4a)	18 - 6	(4b)	18 - 7

Es zeigte sich, daß die Eingeborenen fantasievoll Strategien entwickelten, um solche Aufgaben mit Hilfe der Körperzahltechnik zu lösen. Versuchen auch Sie, Verfahren zu entwickeln, mit den Körperzahlen der Eipo solche Aufgaben zu lösen.

Aufgabe H 12: **[Bezüge: 1.2, 2.2]**

(1) Bestimmen Sie für die beiden in den Abbildungen 16 und 17 im Abschnitt 2.2 abgebildeten Tafeln jeweils die geltende Gleichung zwischen den Zeichen ⊳ und ● .

(2) Wie die in den Abbildungen 18 bis 23 zusammengestellten Ergebnisse der Entzifferung der archaischen Zahlzeichen zeigen, besaßen die archaischen Zahlzeichen keine feste Bindung an bestimmte nummerische Werte. Verwenden Sie diese Abbildungen der Systeme um die folgenden Fragen zu beantworten.

- In welchem Verhältnis stehen die Zeichen ● und bei der Anwendung auf:
  a) Schafe (Sexagesimalzahlen),
  b) Rationen (Bisexagesimalzahlen),
  c) Gerste (Getreidezahlen),
  d) Feldflächen (Feldflächenzahlen)?
- In welchem Verhältnis stehen die Zeichen ● und ⬤ bei der Anwendung auf:
  a) Schafe (Sexagesimalzahlen),
  b) Gerste (Getreidezahlen),
  c) Feldflächen (Feldflächenzahlen)?
- In welchem Verhältnis stehen die Zeichen und ⬤ bei der Anwendung auf:
  a) Schafe (Sexagesimalzahlen),
  b) Gerste (Getreidezahlen)?

Aufgabe H 13: **[Bezüge: 1.3, 2.3]**

(1) Die in Abbildung 29 wiedergegebene Tafel aus der Schreiberschule der antiken Stadt Nippur ist eine aus der altbabylonischen Periode (1. Hälfte des 2. Jtsd. v. Chr.) stammende, im sexagesimalen Stellenwertsystem geschriebene, babylonische Einmaleinstafel. Welche ist es?

(2) Überlegen Sie, warum die aufgeführten Einmaleinssätze hinreichen, um alle weiteren im sexagesimalen Stellenwertsystem benötigten Produkte der vollen Einmaleinsreihe auszurechnen?

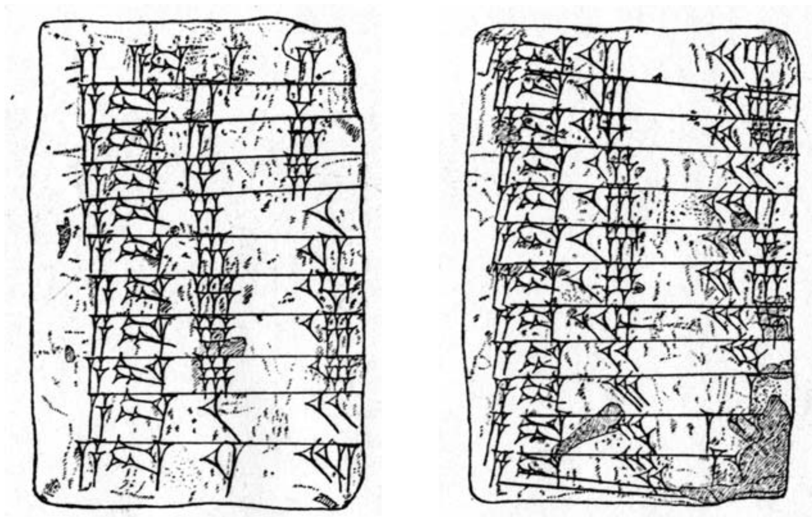


Abbildung 29: Vorder- und Rückseite einer Schultafel aus Nippur (nach Hilprecht 1906)

Aufgabe H 14: **[Bezüge: 1.3, 2.3]**

Im Abschnitt 2.3 wurden die Struktur und die Entstehung der altbabylonischen Reziprokentafeln erläutert und die moderne Notationsweise eingeführt, bei der das Semikolon unserem Komma als Trennzeichen zwischen dem ganzzahligen Anteil und den Bruchteilen entpricht. Als Rechenmittel wurde die Reziprokentafel in einer standardisierten Form verwendet, die im folgenden in moderner Umschrift wiedergegeben wird:

Reziprokes		*Reziprokes*		*Reziprokes*	
von	ist	von	ist	von	ist
2	0;30	16	0;3,45	45	0;1,20
3	0;20	18	0;3,20	48	0;1,15
4	0;15	20	0;3	50	0;1,12
5	0;12	24	0;2,30	54	0;1,6,40
6	0;10	25	0;2,24	60	0;1
8	0;7,30	27	0;2,13,20	64	0;0,56,15
9	0;6,40	30	0;2	72	0;0,50
10	0;6	32	0;1,52,30	75	0;0,48
12	0;5	36	0;1,40	80	0;0,45
15	0;4	40	0;1,30	81	0;0,44,26,40

Einige Beispiele dafür, wie diese Tabelle zu lesen ist:

$^{1}/_{5} = {}^{12}/_{60}$, $^{1}/_{8} = {}^{7}/_{60} + {}^{30}/_{60^2}$, $^{1}/_{24} = {}^{2}/_{60} + {}^{30}/_{60^2}$, $^{1}/_{32} = {}^{1}/_{60} + {}^{52}/_{60^2} + {}^{30}/_{60^3}$.

(1) Solcher Reziprokentafeln verwendeten die Babylonier zum Dividieren. Versuchen Sie, für das im Folgenden vorgerechnete Beispiel Begründungen zu geben.

- 19 : 8 kann man auch interpretieren als $19 \cdot {}^{1}/_{8}$; und für $^{1}/_{8}$ kann man der Reziprokentafel folgende Sexagesimal-Darstellung entnehmen: 0;7,30 .

  Also kann man, statt 19 : 8 zu berechnen, auch rechnen: $19 \cdot 0;7,30$.

- Mit Hilfe von Multiplikationstafeln und, falls erforderlich, geeigneten Additionen konnten die Babylonier ein solches Produkt ausrechnen. Durch geschicktes Rechnen im Sexagesimalsystem läßt sich ein solches Produkt aber auch ohne eine babylonische Multiplikationstafel ermitteln, notfalls gestützt auf die uns vertraute Vorstellung von Stunden, Minuten und Sekunden:

$2 \cdot 0;7,30$	= 0;15	[warum?];
$8 \cdot 0;7,30$	= 1;0	[warum?];
$16 \cdot 0;7,30$	= 2;0	[warum?];
$3 \cdot 0;7,30$	= 0;15 + 0;7,30 = 0;22,30	[warum?];

Also hat man:

$19 \cdot 0;7,30$	= 2;22,30	[warum?].

Mithin hat man insgesamt: 19 : 8 = 2;22,30 ($= 2 + {}^{22}/_{60} + {}^{30}/_{60^2}$). Kontrollieren Sie dieses Ergebnis mit unserer modernen Bruchrechnung!

(2) Berechnen Sie nun selber in gleicher Weise:

(2.1) 78 : 24 (2.2) 68 : 32 (2.3) 39 : 27

Aufgabe H 15: **[Bezüge 1.3, 2.3]**

Und wie hat man im antiken Ägypten dividiert? Für dasselbe Beispiel wie in Aufgabe H 14 und mit der in der modernen Literatur verwendeten Notation „$\overline{n}$" für „$^{1}/_{n}$" sieht die Rechnung folgendermaßen aus:

	1	8	Aufgabenformulierungen analog zu ägyptischen Texten:
/	2	16	„Rechne mit 8 bis (zum) Finden (von) 19!"
	$\overline{2}$	4	
/	$\overline{4}$	2	
/	$\overline{8}$	1	Also erhält man: $19 : 8 = 2 + \overline{4} + \overline{8}$ $(= 2 + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{8})$.

(1) Berechnen Sie mit dem Verfahren der Ägypter die Aufgaben 78 : 24 sowie 68 : 32 aus Aufgabe H 14 (2).

(2) Das Divisionsverfahren der Ägypter war kein allgemein anwendbares Verfahren. Viele Aufgaben lassen sich nur unter großen Schwierigkeiten lösen. Zu den leichter zu lösenden Problemen gehört die Aufgabe 39 : 27, bei der das Vorgehen nur leicht variiert werden muß, indem auch andere einfache Operationen angewendet werden als nur das Halbieren. Versuchen Sie die Aufgabe zu lösen, wobei zu beachten ist, daß die Ägypter nur Stammbrüche als Ergebnis zuließen.

Aufgabe H 16: [Bezüge 1.3, 2.3]

(1) Im Abschnitt 2.3 wurde als Beispiel für eine umfassende Datumsangabe bei den Maya die folgende angegeben: 13 Ahau (religiöser Kalender) 13 Yaxkin (weltlicher Kalender). Nach wie vielen religiösen Jahren und nach wie vielen Sonnenjahren konnte diese Datumskombination - oder überhaupt eine bestimmte Datumskombination - wieder auftreten?

(2) Warum sind die folgenden Aussagen richtig:

- Der Tagesname des religiösen Kalenders (Tzolkin), mit dem ein weltliches Jahr (Haab) begann, war stets auch der 1. Tag jeden weiteren Monats des Haab in diesem Jahr.
- Jeder Tagesname des Tzolkin behielt die Positionsnummer des Haab in allen 18 Monaten des Haab bei, die er im ersten Monat des Jahres hatte.
- Als erste Tage in einem weltlichen Jahr (Haab), als „0 Pop“ - also „Neujahrstage“ sozusagen - konnten nur vier der zwanzig Tagesnamen des religiösen Kalenders (Tzolkin) in Frage kommen, und zwar die Tage Eb, Caban, Ik und Manik.

(3) Der Tag Akbal hatte am dritten Tag nach dem Beginn der Zeitrechnung des „long count“ (4 Ahau 8 Cumku) die Nummer 11 als Positionsnummer im Monat des Haab (Warum?). Cumku ist der letzte Monat des Haab. In allen vorangegangenen Monaten des Haab hatte der Tag Akbal die gleiche Nummer 11 als Positionsnummer im Monat des Haab, mit dem Haab-Jahreswechsel zum Monat Pop jedoch verliert der Tag Akbal wegen der eingeschobenen fünf Tage des Uayeb diese Positionsnummer.

- Welche Positionsnummer im Monat des Haab hat er jetzt nach dem Jahreswechsel? Nach wie vielen Jahren hat er wieder die Nummer 11 als Positionsnummer im Monat des Haab?
- Welche Nummern hat er in den Jahren dazwischen?
- Überlegen Sie, daß diese Regelmäßigkeiten womöglich auch praktische Vorteile haben konnten.

Aufgabe H 17: [Bezüge 1.4, 2.4]

(1) Woran läßt sich in den Definitionen des Buches VII der *Elemente* des Euklid, die im Abschnitt 2.4 angeführt wurden, erkennen, daß mit diesen Definitionen nur natürliche Zahlen - und nicht etwa Bruchzahlen - gemeint waren?

(2) In der Literatur findet man, daß die Einheit (Eins) in der griechischen Antike nicht als Zahl betrachtet worden sei, wohl als deren Ursprung. Können Sie in den im Abschnitt 2.4 angeführten Definitionen der Lehre vom Geraden und Ungeraden Argumente dafür finden?

(3) Zu den Definitionen des Buches VII der *Elemente* des Euklid gehören auch solche, die nicht direkt der Lehre vom Geraden und Ungeraden zugerechnet werden können. In Abschnitt 2.4 wurden daher die folgenden Definitionen nicht angeführt:

(Def.16) Wenn zwei Zahlen bei gegenseitiger Vervielfältigung eine Zahl bilden, wird die entstehende eine ebene Zahl genannt und die einander vervielfältigenden Zahlen

Seiten;

(Def.17) wenn drei Zahlen bei gegenseitiger Vervielfältigung eine Zahl bilden, ist die entstehende eine körperliche Zahl, und die einander vervielfältigenden Zahlen sind ihre Seiten.

(Def.18) Quadratzahl ist eine Zahl gleichmal gleich, oder die von zwei gleichen Zahlen umfaßt wird;

(Def.19) Kubikzahl ist eine Zahl gleichmal gleichmal gleich, oder die von drei gleichen Zahlen umfaßt wird.

(Def.20) Zahlen stehen in Proportion, wenn die erste von deren zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten.

(Def.21) Ähnliche ebene und körperliche Zahlen sind solche, deren Seiten in Proportion stehen.

(Def.22) Eine vollkommene Zahl ist eine solche, die ihren Teilen zusammen gleich ist.

- Gibt es in diesen Definitionen auch Stellen, welche daran Zweifel begründen, daß zum Zeitpunkt, als Euklid seine *Elemente* zusammenstellte, die Eins nicht als Zahl betrachtet wurden?

  Hinweis: Vergleichen sie insbesondere die Definition 22 mit den Definitionen 2 und 3. Beachten Sie dabei, daß 6 und 28 vollkommene Zahlen sind.

(4) Versuchen Sie nunmehr, Ihre Arbeitsdefinitionen zu den Begriffen gerade Zahl und ungerade Zahl aus Aufgabe H 7 mit Ihren inzwischen gewonnenen Einsichten abzugleichen.

Aufgabe H 18: [Bezüge 1.4, 2.4]

(1) Betrachten Sie die Aussage (30) aus Buch IX der „Elemente“ von Euklid - zit. im Abschnitt 1.4: Eine ungerade Zahl muß, wenn sie eine gerade Zahl mißt, auch deren Hälfte messen.

Versuchen Sie verschiedene Begründungen, und zwar im Rahmen der Rechenstein-Arithmetik sowie im Rahmen der „Elemente“-Arithmetik (sensu Euklid - siehe auch Aufgabe H 7(4) im Abschnitt 1.4 sowie den Abschnitt 2.4) und last not least im Stile der elementaren Zahlentheorie (Sätze über Teilbarkeit und Primzahlen; je nachdem, welche Sätze man benutzt, gibt es hier auch mehr als nur eine Möglichkeit).

(2) Versuchen Sie gleiches etwa mit den Aussagen (29) oder (31) oder (32) .

Aufgabe H 19: [Bezüge 1.5, 2.5]

Das Verdoppeln und das Halbieren von natürlichen Zahlen - bei Adam Ries als „Duplirn“ und „Medirn“ bezeichnet - wurden von den Rechenmeistern als eigenständige Rechenoperationen betrachtet. Damit kann man auch das Multiplizieren beliebiger Produkte realisieren.

(1) Interpretieren Sie das folgende Rechenschema für das Produkt $72 \cdot 23$:

	72	23	Zeile (0)	
	36	46	Zeile (1)	
	18	92	Zeile (2)	
/	9	184	Zeile (3)	
	4	368	Zeile (4)	(4 ist die Hälfte von 9 bei „weggelassenem Rest“!)
	2	736	Zeile (5)	
/	1	1472	Zeile (6)	

Das Produkt ergibt sich aus den markierten Zeilen: $72 \cdot 23 = 184 + 1472 = 1656$.

- Warum sind die Produkte in den Zeilen (0) bis (3) untereinander gleich, ebenso die in den Zeilen (4) bis (6)?
- Warum ergibt die Summe der zweiten Faktoren in den Zeilen mit ungeradem ersten Faktor, also die Summe der Zeilen (3) und (6), das gesuchte Produkt?
- Können Sie die Vorgehensweise als Rechenvorschrift formulieren?
- Können Sie sogar eine Begründung für die Korrektheit angeben?

(2) Berechnen Sie folgende Produkte gemäß der eben exemplifizierten Vorgehensweise.

(2.1) $56 \cdot 17$ (2.2) $167 \cdot 32$ (2.3) $64 \cdot 45$

Aufgabe H 20: [Bezüge 1.5, 2.5]

Adam Ries (1492-1559) beschreibt in seinem 2 . Rechenbuch von 1522 das schriftliche Dividieren folgendermaßen (modernisierten Textfassung von Deschauer, 1992):

> Dividieren lehrt, eine Zahl durch die andere zu teilen. Vorne mußt du anfangen. Schreibe dir die Zahl auf, die du teilen willst, und unter die erste Ziffer den Teiler, sofern du durch eine Ziffer teilst und du abziehen kannst. Ist aber der Teiler größer, so schreibe ihn unter die zweite Ziffer und schaue, wie oft du ihn abziehen kannst. Ebenso oft ziehe ihn ab und schreibe, wie oft du ihn abgezogen hast, neben der Zahl nach einem kleinen Strich. Multipliziere mit dem Teiler und ziehe von der ganzen Zahl ab. Sodann rücke mit dem Teiler unter die nächste Ziffer nach rechts und schaue, wie oft du ihn abziehen kannst. Ebenso oft ziehe ihn ab und schreibe es nach der vorigen Ziffer und so fort, bis unten keine Ziffer mehr zu rücken ist, wie hier:

```
  455                677
40743  (6789       54312  (6789
  6666               8888
```

(1) Vergleichen Sie diese Vorgehensweise mit der Ihnen geläufigen.

(2) Beschreiben Sie diese Vorgehensweise für zweistellige Divisoren.

Literatur

Becker, O.: Die Lehre vom Geraden und Ungeraden. In: O. Becker (Hrsg.): Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Darmstadt 1965, S. 125-145.

Damerow, P.: Die Entstehung des arithmetischen Denkens. In: P. Damerow und W. Lefèvre (Hrsg.): Rechenstein, Experiment, Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften. Stuttgart 1981, S. 11-113.

Damerow, P.: Ein Brief über die Entzifferung der Zahlzeichen in den ältesten Schriftzeugnissen der Welt. In: mathematiklehren, 19 (Dezember 1986), S. 56-58, und 20 (Februar 1987), S. 66.

Damerow, P.: Zum Verhältnis von Ontogenese und Historiogenese des Zahlbegriffs. In: W. Edelstein und S. Hoppe-Graf (Hrsg.): Die Konstruktion kognitiver Strukturen. Perspektiven einer konstruktivistischen Entwicklungspsychologie. Bern 1993, S. 195-259.

Damerow, P.: Vorüberlegungen zu einer historischen Epistemologie der Zahlbegriffsentwicklung. In: G. Dux und U. Wenzel (Hrsg.): Der Prozeß der Geistesgeschichte. Studien zur ontogenetischen und historischen Entwicklung des Geistes. Frankfurt/ Main 1994, S. 248-322.

Damerow, P., R.K. Englund und H.J. Nissen: Die ersten Zahldarstellungen und die Entwicklung des Zahlbegriffs. In: Spektrum der Wissenschaft, März 1988, S. 46-55.

Deschauer, S.: Das zweite Rechenbuch von Adam Ries. Eine moderne Textfassung mit Kommentar und metrologischem Anhang und einer Einführung in Leben und Werk des Rechenmeisters. Braunschweig 1992.

Euklid: Die Elemente (hrsgg. von C. Thaer). Darmstadt 1975.

Gericke, H.: Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim 1970.

Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient/Mathematik im Abendland (Sonderausgabe in einem Band). Wiesbaden 1992.

Heeschen, V. und W. Schiefenhövel: Wörterbuch der Eipo-Sprache. Berlin 1983.

Hilprecht, H. V.: Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur. Philadelphia 1906.

Ifrah, G.: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/Main 1986.

Koch, G. Malingdam. Ethnographische Notizen über einen Siedlungsbereich im oberen Eipomek-Tal, zentrales Bergland von Irian Jaya (West-Neuguinea), Indonesien. Berlin 1984.

Lefèvre, W.: Rechensteine und Sprache. Zur Begründung der wissenschaftlichen Mathematik durch die Pythagoreer. In: P. Damerow und W. Lefèvre (Hrsg.): Rechenstein, Experiment, Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften, Stuttgart 1981, S. 115-169.

Menninger, K.: Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. 2. Aufl., Göttingen 1958.

Neugebauer, O.: Vorgriechische Mathematik. Berlin 1934.

Nissen, H.J., P. Damerow, und R.K. Englund: Frühe Schrift und Techniken der Wirtschaftsverwaltung im alten Vorderen Orient. Informationsspeicherung und -verarbeitung vor 5000 Jahren. Bad Salzdetfurth 1990.

Saxe, G.B.: Culture and the development of numerical cognition. Studies among the Oksapmin of Papua New Guinea. In: C.J. Brainerd (Hrsg.): The development of logical and mathematical cognition. New York 1982, pp. 157-176.

Saxe, G.B.: Developing forms of arithmetical thought among the Oksapmin of Papua New Guinea. In: Developmental Psychology, 18 (1982), S. 583-594.

Thompson, J.E.S.: Maya arithmetic. In: Contributions to American Anthropology and History, No. 36. Washington 1942, S. 37-62.

Thompson, J.E.S.: A Commentary on the Dresden Codex. A Maya Hieroglyphic Book. Philadelphia 1972.

Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik, 4. Aufl., Bd 1: Arithmetik und Algebra, Berlin - New York 1980.

Vogel, K.: Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik in ihrem Zusammenhang mit der 2:n-Tabelle des Papyrus Rhind. Nachdruck der Diss. (1929). Wiesbaden: Sändig 1970.

Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik I. Vorgeschichte und Ägypten, Hannover 1958.

Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik II. Die Mathematik der Babylonier, Hannover 1959.

Wertheimer, M.: Über das Denken der Naturvölker. In: M. Wertheimer: Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie. Erlangen 1925, S. 106-163.

Wußing, H.: Adam Ries. Leipzig 1989.

Wußing, H. und W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Köln 1978.