



Johann Lamberts Konversion zu einer Geometrie des Raumes

Schritte zu einem neuen Verständnis von Geometrie im achtzehnten Jahrhundert

Von Vincenzo De Risi

Im achtzehnten Jahrhundert kämpften in Europa zwei sehr verschiedene Auffassungen von Geometrie um die Vorherrschaft. Die erste stützte sich auf die klassische Definition von Geometrie als Wissenschaft von Figuren; sie reichte zurück bis zu Euklid und beanspruchte in der Neuzeit immer noch Gültigkeit. Zugleich hatte sich jedoch damals auch eine andere Auffassung von Geometrie abzuzeichnen begonnen: die Idee, daß Geometrie eine Wissenschaft vom Raum selbst sein könnte.

In dieser neuen Theorie bildete der Raum nicht mehr den amorphen Hintergrund, in dem die eigentliche Geometrie ihre Konstruktionen ausführt, sondern der Raum wird selbst zum geometrischen Objekt, das spezifische Eigenschaften aufweist.

Diese moderne und tiefgreifende Auffassung von Geometrie wurde hauptsächlich von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) anvisiert;

er entwickelte sie in Hunderten mathematischer und philosophischer Abhandlungen als Teil einer geometrischen *analysis situs*. Die mathematischen Ergebnisse dieses Projekts wurden zu seinen Lebzeiten nicht veröffentlicht und auch nicht während des ganzen achtzehnten Jahrhunderts. Doch Leibnizens philosophische Argumente und epistemologische Annahmen über die Notwendigkeit einer eigenen

Geometrie des Raumes fanden gleichwohl einige Anhänger. In Deutschland sorgte die neue „Leibnizsche“ Schule von Christian Wolff (1679-1754) und dessen Nachfolgern für eine weite Verbreitung der Idee, daß die Geometrie eine Wissenschaft vom Raum sein müsse. Das Hauptproblem lag jedoch darin, daß Wolffs mathematische Fähigkeiten bei weitem nicht ausreichten, um wiederzuentdecken, was Leibniz in den vierzig Jahren seiner geometrischer Untersuchungen aufgeschrieben hatte - was dann aber in der Bibliothek von Hannover begraben lag. Wolff verkündete, daß Geometrie die Wissenschaft des Raumes sei, und daß eine sorgfältige Analyse des Raumbegriffs ein ergiebigeres Feld bieten würde, in dem man das Ganze der Geometrie gründen könnte; dann fuhr er aber so fort, daß er die üblichen Euklidischen Definitionen und Axiome vorstellte (die von Geraden und Kreisen handelten, nicht vom Raum) und mit Zirkel und Lineal eins nach dem andern die gewöhnlichen Theoreme und Probleme der *Elemente* konstruierte. Die Geometrie des Raumes blieb also eine Idee ohne jeden realen Inhalt. Zumindest am Anfang also trug der „konservative Flügel“ der deutschen Mathematiker und Philosophen, die die Geometrie nach wie vor als Wissenschaft von Größen und Figuren betrachteten und den Raum als formloses und ungeometrisches Behältnis für die eigentlichen mathematischen Objekte betrachteten, einen leichten Sieg davon.

Die Geschichte von Johann Heinrich Lambert (1728-1777) ist dabei besonders erhellend. Seine Anfänge als Mathematiker und als Epistemologe zeigen deutlich, daß er seine philosophischen Untersuchungen über Mathematik in ganz klassischer Weise anfang, und daß er die Wolffsche Raumkonzeption zugunsten der Eu-

klidischen verwarf. In seinem ersten größeren philosophischen Werk, *Neues Organon* (aus dem Jahre 1764), vertrat er die Auffassung, daß die Vorstellung des Raumes *einfach* sei (nicht zusammengesetzt), und daher nicht analysiert werden könne; damit war die bloße Vorstellung von Geometrie als Analyse des Raumes bereits entschieden ausgeschlossen.

Im Jahr darauf (am 21. April) schrieb Lambert an Georg Jonathan Holland, daß die Geometrie von Euklid zu Recht nicht als *Analyse* des Raumbegriffs durchgeführt werde, sondern als dessen *Anatomie*. Der Mathematiker gehe richtig vor, behauptete er, wenn er von der einfachen Idee der Ausdehnung ausgehe und diese in Stücke (in geometrische Figuren) zerschneide, welche dann ihrerseits alle die geometrischen Eigenschaften aufwiesen, die dem Raum selbst abgingen. Noch später im selben Jahr 1765 (am 13. November) schrieb er an Kant, Wolff, habe Euklid komplett mißverstanden. Am 3. Februar 1766 bekräftigte er in einem weiteren Brief an Kant erneut, die Vorstellung des Raumes sei einfach, und daß sie nirgendwo in Euklids *Elementen* auftauche - zu Recht, denn sie sei faktisch nutzlos.

Aber dann verstummten Lamberts kühne Behauptungen plötzlich. Tatsächlich war er auf eine kurze Abhandlung (aus dem Jahr 1763) des Mathematikers Georg Simon Klügel (1739-1812) gestoßen, in der eine Reihe von Versuchen, das Parallelenpostulat zu beweisen, im Detail beschrieben wurden. Das Thema faszinierte Lambert und er begann es eingehender zu untersuchen, was ihn schließlich zu seinem eigenen Versuch eines Beweises für das berühmte Axiom führte. Seine *Theorie der Parallelinien* wurde (vermutlich) im folgenden September (1766) geschrieben, aber sie wurde zu



Der Mathematiker Luca Pacioli illustriert die Geometrie der Proportionen. Porträt eines unbekanntem Malers. Quelle: Wikimedia Commons.

einem unverkennbaren Fehlschlag. Lambert veröffentlichte sie niemals und er mußte sich mit der schwächeren Position begnügen, in der das Parallelen-Postulat die Stellung eines nicht beweisbaren Prinzips für die gesamte geometrische Wissenschaft einnimmt. Gleichwohl barg dieser Fehlschlag eine Lehre für den Epistemologen.

Einer der wichtigen Durchbrüche in der Theorie der Parallelität war John Wallis' (1613-1703) Abhandlung *De Postulato Quinto* von 1663 (erstmalig veröffentlicht 1693), die Lambert wahrscheinlich bei seinem eigenen Versuch, das Euklidische Axiom zu beweisen, zur Kenntnis nahm. Wallis hatte bewiesen, daß die Annahme des Pa-

rallelen-Postulats äquivalent war zur Möglichkeit, eine beliebige Figur in eine ähnliche zu transformieren; wenn beispielsweise ein Dreieck gegeben ist, dann ist es möglich, ein ähnliches Dreieck (d.h. ein Dreieck mit gleichen Winkeln und kleineren oder größeren proportionalen Seiten) zu konstruieren dann und nur dann, wenn das Parallelen-Postulat gilt.

Die Reaktionen der Gelehrten auf Wallis' Beweisgang waren unterschiedlich; doch zeigte er jedenfalls, daß das Parallelen-Postulat, das in Euklids Wortlaut ein Axiom über Geraden und Winkel war, tatsächlich mit etwas viel Abstrakterem und Unvertrauterem zu tun hat. Es handelt von der Möglichkeit bestimmter Transfor-

mationen im Raum, die sämtliche möglichen Figuren und Größen betreffen; letztlich erweist es sich in Wahrheit als ein Axiom über die Struktur des Raumes selbst. Dieses letztere Verständnis war wahrscheinlich der größte Fortschritt, den Wallis' Arbeit über den Parallelismus in der Geometrie des achtzehnten Jahrhunderts bewirkte.

Es ist unschwer einzusehen, daß Lambert diesem Resultat große epistemologische Bedeutung beimessen mußte. Sein Versuch, das Parallelpostulat mit rein mathematischen Argumenten zu beweisen, war wahrscheinlich auch ein Versuch, seine philosophische Bedeutung zu entschärfen. Als er daran scheiterte, und sich klarmachte, was daraus für Folgerungen zu ziehen waren, wurde ihm bewußt, daß es schlicht unmöglich war für ihn, das Euklidische Axiom als ein Prinzip über gerade Linien anzusehen: es hatte sich für ihn enthüllt als Aussage über Transformationen und die Struktur des Raumes und er konnte nicht länger „Ausdehnung“ als formlosen Hintergrund verstehen, oder als „einfache Idee“, ohne jeden geometrischen Inhalt.

In einer späteren Arbeit, die er 1771 veröffentlichte, *Anlage zur Architektonik*, war Lambert gezwungen, geometrische Axiome nicht nur über Figuren oder Größen sondern auch über den Raum selbst zu formulieren. Das zweite dieser Axiome ist genau das Parallelpostulat, an dessen Beweis er scheiterte, in der Wallis'schen Form: *Der Raum hat keine be-*

stimmte Einheit... Er war also übergeschwenkt zur Leibnizschen Idee einer Geometrie des Raumes, nicht einfach aufgrund philosophischer Argumente, sondern durch einen mühsamen (und schönen) Versuch, ein bestimmtes mathematisches Resultat zu beweisen.

Die Geschichte von Lamberts „Konversion“ von Euklid zu Leibniz ist sehr sprechend, was die Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophie im achtzehnten Jahrhundert betrifft, und sie ist ein wichtiges Ereignis in der allmählichen Transformation der klassischen Geometrie zu einer modernen Geometrie der Räume. Andere Denker, Mathematiker wie Philosophen, kamen in denselben Jahren, allerdings aus ganz anderen Gründen, zu demselben Resultat; und die Generation nach Lambert schließlich betrachtete die Definition von Geometrie als Wissenschaft vom Raum als so offenkundig, daß sie nicht einmal mehr einer Erklärung bedurfte.

Die Forschungsgruppe *Moderne Geometrie und der Begriff des Raums* verfolgt unter anderem das Ziel, Lamberts Rolle in der begrifflichen Entwicklung der Geometrie im achtzehnten Jahrhundert zu untersuchen und zu erforschen, wie in denselben Jahren andere Akteure mit anderen Zielsetzungen darin konvergierten, daß sie dieselben bedeutsamen Resultate bekräftigten.

Vincenzo De Risi ist seit 2010 Forschungsgruppenleiter am MPIWG (vderisi@mpiwg-berlin.mpg.de).

Eine vollständige Version ist mit weiteren Forschungsthemen auf der Institutswebsite zugänglich („Aktuelles/Aktuelle Themen“).